Math. U. 308a
(1

Erster Unterricht
in der
Algebraischen Auflösung
arithmetischer und geometrischer
Aufgaben

Ein Lehrbuch
des Dessauischen Erziehungsinstitutes

Bayer. Staatsministerium
f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei

von
Friedrich Gottlieb Busse
Professor und Lehrer der Mathematik.

Mit zwei Kupfertafeln.

Dessau
im Verlage der Instituts-Buchhandlung, und zu Leipzig
in Commission bei Crusius. 1781.

Gd/67/2434

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seiner Hochwürden

dem

Herrn Rötger

Prälat und Probst des Klosters U. L. Frauen

in Magdeburg

und

Seiner Hochehrwürden

dem

Herrn Schaumann

Pastor an der St. Marien-Kirche

in Salzwedel.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Hochwürdiger Herr,

Höchstzuverehrender Herr Probst,

Hochehrwürdiger

Hochzuverehrender Herr Pastor,

Erlauben Sie es, verehrungswürdige Männer, diesen ersten Versuch in meinen mathematischen Arbeiten, zum Beweise meiner schuldigsten Dankbarkeit und Hochachtung, Ihnen zuzuschreiben, deren treuem, geschmakvollem und gründlichem Unterrichte ich die erste Neigung zu diesen Wissenschaften zu verdanken habe.

Der unermüdete Eifer, womit Ew. Hochwürden für die Ausbildung meiner jugendlichen Kräfte besorgt

 waren,

waren, die freundschaftliche Vertrau-
lichkeit, wodurch Sie sich zu mir her-
abließen, und das Beispiel meiner
Mitschüler und der übrigen verdienst-
vollen Lehrer, von denen Sie algemein
verehrt und geliebt wurden, bewürkte
die ungemeine Dankbarkeit, Liebe und
Hochachtung, die ich schon als Jüng-
ling für Sie empfand. Je mehr ich in
den folgenden Jahren, durch Erwei-
terung meiner Kentnisse und Erfarun-
gen, den Wert solcher Männer schä-
zen lernte, welche mit einer ausgebrei-
teten Gelehrsamkeit und dem durch-
dringendsten Verstande eine unwandel-
bare Güte des Herzens verbinden, um
desto mehr ward ich auch überzeugt,
daß Ew. Hochwürden die gröste Hoch-
achtung und Liebe volkommen verdie-
nen, womit Sie so algemein verehrt
werden, und wovon — ein sicheres

Zeichen

Zeichen des wahren Verdienstes — gerade diejenigen würdigen Männer, welche am nächsten mit Ihnen verbunden sind, vor einiger Zeit den thätigsten Beweis dargelegt haben.

Auch Sie, mein würdiger Lehrer in meiner frühern Jugend, verdienen meinen wärmsten Dank, für die Treue und Sorgfalt, womit Sie an mir gearbeitet, und meine volkommenste Hochachtung, durch den seltnen Eifer, womit Sie, bei einer gründlichen Gelehrsamkeit und den vorzüglichsten Talenten, den grösten Theil Ihres Lebens zum Besten der Jugend verwandt haben. Mit innigstem Vergnügen hab ich von Zeit zu Zeit die Nachricht erhalten, daß Ew. Hochehrwürden in Ihrem verdienstvollen Alter, geliebt und geehrt von allen, die

Sie kennen, durch Lehre und Beispiel wahrscheinlich der Welt noch lange nuzen werden.

Indem ich dis schreibe, bin ich so lebhaft, als noch niemalen, überzeugt, daß es eine der köstlichsten Freuden meiner folgenden Jahre sein werde, wenn auch diejenigen, an deren Bildung ich jezt arbeite, als Männer einen Theil der Liebe und Hochachtung mir gewähren solten, womit ich Sie, meine ehemaligen treuen Lehrer, verehre,

Ew. Ew. Hoch- und Hochehrwürden

gehorsamster Diener,
F. G. Busse.

Vorrede.

Was Algebra sei, und wozu sie nüze, werde ich hier nicht umständlich aus einander sezen. Beides würde für diejenigen, welche dieses Buch in die Hand nemen, entweder unverständlich oder überflüssig sein. Wer indessen ungewis ist, ob er sich für die Mühe werde belohnt halten, die er etwan auf die ersten in diesem Buche vorgetragenen Lehren dieser Wissenschaft verwenden mögte, der frage sich: ob ihn nicht viele von den gewöhnlichen Rechnungsregeln, bei nicht altäglichen Aufgaben, oft verlassen, oder gar auf lächerliche Resultate gebracht haben; ob ihn die Menge der verschiednen Regeln in den Rechenbüchern nicht sehr oft verwirre; ob es ihm nicht ziemlich schwer falle, die Gründe und die richtige Anwendung einer jeden Rechnungsart zu prüfen, deutlich zu übersehen, und auch andern begreiflich zu machen; ob er nicht öfters über die Richtigkeit solcher Behauptungen, als man etwan §§. 512. 511. 315. 270. erwiesen findet, nach vielen mühsamen Versuchen ungewis geblieben sei; ob ihm, auch bei hinlänglicher Kentnis der Elementargeometrie, die besten von unsern neuen Lehrbüchern in den Anfangsgründen der Naturlehre und der angewandten Mathematik nicht unverständlich geblieben sind? Ein jeder aber, der nur einige Fertigkeit in den ersten Lehren der Algebra erlangt hat, wird dagegen versichern, daß er auch durch ganz neue Rechnungsaufgaben nicht leicht in Verlegenheit gesezt werde; daß er sehr viele, auch im gemeinen Leben vorkommende, Auf-

gaben durch die leichte und deutliche algebraische Auflösung weit lieber, volkomner und sicherer, als nach manchen einzelnen Rechnungsregeln beantworte; daß ihm nicht nur jede Anwendung der theoretischen Mathematik, sondern auch überhaupt alle Untersuchungen über jede Art der Größen, durch die algebraischen Ausdrükke sehr erleichtert sind, und fast alle Lehrbücher, welche diese zu vermeiden suchen, durch ekelhafte Weitschweifigkeit ihm undeutlich werden.

Man wird es leicht entdekken, daß die ersten Kapitel dieses Lehrbuches für solche Anfänger bestimt sind, welche noch gar keinen Unterricht in der Mathematik genossen haben, die folgenden Kapitel aber mit einem nebenher gegebnen Unterrichte in der Elementargeometrie abwechseln sollen. Daß die ersten Lehren der Algebra wenigstens eben so leicht und faslich sind, als die ersten Warheiten der Geometrie, darf ich wol nicht weiter zu beweisen suchen. Verschiedne kleine Lehrbücher, welche sich für Anweisungen zur Algebra ausgeben, und doch nur ihre ersten Anfangsgründe vortragen, haben Gelegenheit gegeben, diese ganze Wissenschaft für leichter zu halten, als sie wirklich ist. Nicht ganz so überflüssig mögte es für einige Leser sein, wenn ich einige Gründe kürzlich berühre, warum ich glaube, daß die ersten Lehren der Algebra zur ersten Uebung im gründlichen Denken geschikter sind, als die Anfangslehren der Geometrie; daß sie auch für Anfänger angenehmer und unterhaltender sind; und endlich auf mancherlei Weise dazu beitragen, selbst den Unterricht in der Geometrie zu erleichtern und angenehmer zu machen.

Die sinliche Darstellung der ersten geometrischen Lehrsäze durch die Figuren kan die Einsicht in die geometrischen Beweise gewis nicht so sehr befördern, als man gewöhnlich glaubt. Denn nur für schon geübte Denker, und nicht für Anfänger, bleibt die Ueberzeugung des Verstandes durch Schlüsse auch da noch wichtig, wo schon der erste Anblik der Zeichnung von der Warheit der Behauptung und der Unmöglichkeit des Gegenteiles einen augenscheinlichen Beweis giebt. Eine leichte Uebersicht der Seite 337-339. angeführten geometrischen Warheiten wird es zeigen, daß dis wenigstens bei den ersten 15 Lehrsäzen der Fal ist. Eben dis ist eine von den Hauptursachen, warum die ersten Warheiten der Geometrie auch für die besten Köpfe mehrenteils so wenig Reiz haben. Man hätte ein sicheres Mittel diese, dem ersten Anscheine nach so unbedeutenden, Säze auch den Anfängern wichtig zu machen, wenn man ihnen zeigen könte, daß sie nur vermittelst dieser Lehren einige offenbar nüzliche, oder wenigstens unterhaltende, Aufgaben auflösen könten. Mir sind etwan nur zwei dergleichen Aufgaben bekant. Die unter Nummer 9 .... 12, 18. angeführten Aufgaben sind den ungeübtesten Schülern nicht so bald vorgelegt, als sie schon die mechanische Auflösung bei der Hand haben, und der wichtige Vorzug der geometrischen Auflösung vor der mechanischen hat wiederum für denjenigen keinen Wert, der sich von der Nothwendigkeit der Postulate noch keine Vorstellung machen kan. Die sinlichen Zeichen der Algebra hingegen erleichtern die Ueberschauung der Schlusfolgen, ohne uns von der Warheit des gefolgerten Sazes selbst durch den Augenschein zu überzeugen.

Nicht

Nicht das bloße Anschauen der Buchstaben und Gleichungen, sondern das Ueberdenken der mit den sinlichen Zeichen verbundenen Begriffe und der Gründe, wonach die eine Gleichung aus der andern folget, kan die gewünschte Ueberzeugung gewären. Die Belohnung für diese Anfangs sehr geringe Anstrengung des Verstandes erfolgt unmittelbar durch die gefundene Auflösung einer Aufgabe, welche schon darum angenehm ist, weil sie auf den ersten Anblik nicht so gar leicht schien. Die Menge ähnlicher Aufgaben, welche sich durch die wenigen in den ersten Lehrstunden gefaßten Kunstgriffe auflösen lassen, unterhalten sogleich den ersten Eifer der Anfänger auch außer den Lehrstunden.

Diejenigen Lehren der Arithmetik, welche vor einem jeden Lehrbuche der Geometrie abgehandelt werden, sind teils zur ersten Anwendung der geometrischen Lehrsäze auf die Ausmessung der Figuren, teils zur Trigonometrie unentbehrlich. Die Beweise derselben sind nur alsdan äußerst schwierig und ermüdend, wenn man alle algebraische Zeichen und Schlüsse vermeiden mus, und werden dadurch — besonders wenn man mit ihnen den Anfang des mathematischen Unterrichts macht — eine neue Ursache, warum so wenige junge Leute an dieser Wissenschaft Geschmak finden. Solche Aufgaben, als im 5ten, 8ten, 13ten und 15ten Kapitel dieses Buches vorgetragen sind, zeigen einen, jedem Anfänger einleuchtenden, Nuzen der eben erlernten geometrischen Warheiten, und geben zur angenehmen Wiederholung gute Gelegenheit. Man findet endlich schon in des Herrn Prof. Eberts bekantem Lehrbuche verschiedene Beispiele, wie leicht sich manche unentbehrliche geometrische Lehrsäze, deren geometrischer Erweis für

Anfän-

Anfänger zu schwer ist, aus andern erwiesenen Lehrsäzen durch leichte algebraische Schlüsse mit Ueberzeugung herleiten lassen. Dergleichen Erleichterungen sind mir darum wichtig, weil ich meine Schüler an dem angenemen Unterrichte in der Naturlehre und der angewandten Mathematik nicht eher mögte Teil nemen lassen, als bis sie ein kleines System von den nötigsten Lehren der Elementargeometrie und Trigonometrie im Zusammenhange deutlich überschauen und allenfals selbst aufs Papier bringen können. (*)

Für diejenigen, welche etwa diese Gründe billigen und ihren ersten Unterricht in der Mathematik auf ähnliche Weise einrichten wollen, hab ich am Ende des 4ten, 7ten, 10ten, und 14ten Kapitels angezeigt, wie ich den Vortrag der Geometrie mit der Buchstabenrechnung verbun-

(*) Wenn sie ohngefähr die im Anhange p. 337. angeführten geometrischen Lehren nebst der Trigonometrie, nach Herrn Professor Eberts Lehrbuch, und so viel Algebra, als in diesem Buche gelehrt ist, vollkommen inne haben, so sind sie erst fähig die ersten Gründe der angewandten Mathematik kennen zu lernen, wodurch diejenigen, welche vorzüglich zur Mathematik bestimt sind, so viel Geschmak an dieser Wissenschaft gewinnen werden, daß sie — nicht, wie jezt bisweilen verlangt wird, im 8ten — sondern etwa im 18ten Jahre die elementarische, noch nicht die reine Geometrie nach einem Kästner, Segner, Karsten, für sich mit Nuzen und Vergnügen studiren werden. Ich mus hier noch bemerken, daß wir unsere Zöglinge gewönlich nicht vor dem 13ten oder 14 Jahre zum mathematischen Unterrichte zulassen.

bunden habe. Die ersten 25 geometrischen Säze erhalten durch die Algebra wenig Erleichterung. Ich pflege ihnen aber bald Anfangs einen kleinen Teil der algebraischen Lehrstunden zu widmen, weil die glükliche Erlernung der Geometrie hauptsächlich von dem langsamen Fortschreiten zu neuen Lehrsäzen abhängt, und jeder Lehrsaz schon mehrmalen und zu verschiednen Zeiten deutlich gedacht sein mus, ehe man den folgenden drauf gründet. Das vierte Kapitel von den Decimalbrüchen wird vorgetragen, indem man zwischen Num. 25 und 26 zum erstenmale Gelegenheit hat vom geometrischen Decimalmaße zu reden. Die Aufgaben des 5ten Kapitels zeigen die Anwendung der geometrischen Säze von Num. 26 bis 35. Im 6ten Kapitel werden die ersten Lehrsäze der geometrischen Proportion in Zahlen vorgetragen. Nachdem man die Lehrlinge in der Anwendung dieser Lehren durch die nüzlichen Aufgaben des 7ten Kapitels schon etwas geübt hat, so werden sie die Lehren von dem Verhältnis in Linien, von Num. 36 bis 40, mit Leichtigkeit und Vergnügen erlernen. Es wird nicht schwer sein, die ähnlichen Verbindungen zu entdekken, worin die mehrsten folgenden Kapitel mit dem geometrischen Unterrichte gesezt sind.

Eine nach Art der Alten gegebne synthetische Beantwortung der LXVI und LXVIIten Aufgabe, würde mehr Scharfsin und Fertigkeit in der Geometrie erfordern, als die algebraische Auflösung, aber eben darum auch die Kräfte der ersten Anfänger übersteigen. Wer aus der Mathematik Hauptsache machen wil, mus zu seiner Zeit auch an den Werken der Alten seinen Verstand schärfen. Für andere giebt es nur zu viele Lehren der angewandten

Mathe-

Mathematik, die, bei aller Erleichterung der Methode, ein scharfer Prüfstein ihres Verstandes werden können, und außer der Uebung im wolgeordneten Denken auch noch Kentnisse gewären, welche für einen künftigen Regierungsrath, Amtman, Officier ꝛc. weit nüzlicher sind, als die Probleme der alten Geometer.

Nicht nur die Eulerische Klassifikation der Gleichungen, sondern auch manche andere gefällige Ordnung hab ich der Hauptabsicht dieses Buches aufopfern müssen, wozu mir die stufenweise Zuname der Schwierigkeiten, die Abwechselung des angenemern mit dem nüzlichern, und die almälige Vorbereitung zu neuen Lehren vorzüglich nötig schienen. Vielleicht bin ich so glüklich gewesen, nicht sowol durch weitläuftige und wortreiche Erklärungen, als durch Anordnung und Stellung der neuen Begriffe, die ersten Lehren der Algebra so vorzutragen, daß sich Anfänger, auch ohne weitern Lehrmeister, nach diesem Buche unterrichten können. Von andern kleinen Lehrbüchern dieser Art ist es wenigstens darin verschieden, daß es auch den im gemeinen Leben so nüzlichen Gebrauch der algebraischen Rechnungsart bei geometrischen Aufgaben zeiget. Wenn in einer dritten Abteilung dieses Lehrbuches auf einigen Bogen noch etwas weniges von den kubischen Gleichungen, eine weitere Ausfürung des 18ten Kapitels von den unbestimten Aufgaben, und eine Anweisung zu den logarithmischen Rechnungsaufgaben hinzugethan würde; so mögten diese ersten Gründe der Algebra, nebst der Geometrie des Herrn Prof. Ebert oder Funk, ohngefehr so viel von der reinen Mathematik enthalten, als einem jeden Gelehrten, nicht nur zum Verständnis der leich-

leichtesten mathematischen und physikalischen Bücher, sondern auch in manchen andern Vorfällen des bürgerlichen Lebens ungemein nüzlich sein würde.

Von denjenigen, welche sich selbst nach diesem Buche unterrichten wollen, müsten die ersten §§. des 18ten Kapitels bald anfangs gelesen werden; weil die ersten Anfänger, bei den höchst nötigen, selbst versuchten, Auflösungen neuer Aufgaben, nur zu oft auf unbestimte Gleichungen kommen.

Noch mus ich anmerken, daß ich es mir erlaubt habe, die Fragegleichungen, welche mir bei dem mündlichen Unterrichte in der Algebra und auch bei den analytischen geometrischen Beweisen sehr nüzlich gewesen sind, auch in diesem Buche, als z. B. §. 181. abdrukken zu lassen.

Ferner hab ich in manchen Fällen z. B. §. 102, ... x drukken lassen, wo es ungewis war, ob man + x oder — x sezen solte, indem ∓ x die erlaubte Alternative anzeigt. Folgende Bezeichnung der arithmetischen Proportion, a . . b = c . . d, mögte in manchen Fällen bei dem ersten Unterrichte für Anfänger und auch für den Sezer bequemer sein, als die sonst gewöhnlichen.

Wegen der am Ende des Buches sorgfältig angezeigten Verbesserungen, wird mich ein jeder entschuldigen, der es aus Erfarung weis, wie schwer es ist, ermüdet von andern täglichen Geschäften, die Korrekturen eines mathematischen Buches mit gehöriger Aufmerksamkeit zu besorgen.

Erste Abtheilung

zum Gebrauch

der

Untersten Klasse.

Vorläufiger Unterricht in den nötigsten Regeln zur Multiplikation und Division in gebrochenen Zahlen.

Ob wir gleich beim Gebrauche dieses Buches eine ziemliche Fertigkeit in den vier ersten Veränderungsarten der ganzen und gebrochenen Zahlen voraussezen; so wollen wir doch diejenigen Regeln für die Multiplikation und Division der Brüche, bei welchen die ersten Anfänger gewöhnlich einige Schwierigkeit finden, auf folgende Weise vortragen.

Wenn der Zähler des Bruches $\frac{4}{5}$ durch 3 multiplicirt wird; so erhält man $\frac{12}{5}$, welches offenbar 3 mal so viel ist als $\frac{4}{5}$. Wird aber nun in diesem neuen Bruche $\frac{12}{5}$ auch der Nenner durch eben dieselbe Zahl 3 multiplicirt; so erhält man $\frac{12}{15}$, welches dreimal weniger ist, als $\frac{12}{5}$: indem $\frac{1}{15}$ eines jeden Dinges allemal 3 mal weniger ist, als $\frac{1}{5}$ desselben Dinges. Da nun also durch die erste Multiplikation des Zählers der Bruch $\frac{4}{5}$ dreimal größer, durch die zweite Multiplikation des Nenners aber dieser dreimal größere Bruch wiederum

dreimal kleiner gemacht ist; so mus der nach diesen beiden sich selbst aufhebenden Veränderungen hervorgebrachte neue Bruch $\frac{12}{15}$ einerlei Werth mit dem ersten $\frac{4}{5}$ haben.

Eben so ist $\frac{8}{3}$ viermal mehr, als $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{12}$ aber wiederum dreimal weniger, als $\frac{8}{3}$; also mus $\frac{8}{12}$ eben so viel sein, als $\frac{2}{3}$. Und auf diese Weise kan für einen jeden Fal gezeiget werden, daß **allemal der Werth eines Bruches unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerlei Zahl multiplicirt werden.** (*)

Wenn man den Zähler des Bruches $\frac{6}{9}$ durch 3 dividirt; so erhält man $\frac{2}{9}$, welches offenbar 3 mal weni-

(*) Eben dieser Saz könte auch auf folgende Weise sehr faslich dargethan werden.

Ich behaupte, daß z. B. $\frac{2}{3}$ eben so viel ist, als $\frac{8}{12}$, welcher leztere Bruch aus dem ersten entsteht, wenn Zähler und Nenner durch einerlei Zahl, nemlich durch 4, multiplicirt werden. Um sich davon zu überzeugen; so verschaffe man sich noch einen dritten Bruch, indem man blos den Zähler des ersten durch die Zahl 4 multiplicirt: wodurch man den Bruch $\frac{8}{3}$ erhält. Nun ist offenbar

$\frac{2}{3}$ viermal weniger, als $\frac{8}{3}$, und ebenfals auch $\frac{8}{12}$ viermal weniger, als $\frac{8}{3}$, folglich mus nothwendig $\frac{2}{3}$ eben so viel sein, als $\frac{8}{12}$.

weniger ist, als $\frac{6}{9}$. Wird nun aber auch der Nenner dieses neuen Bruches $\frac{2}{9}$ durch 3 dividirt; so erhält man den Bruch $\frac{2}{3}$, welcher wiederum 3 mal mehr anzeigt, als $\frac{2}{9}$: weil $\frac{1}{3}$ eines Dinges allemal dreimal mehr ist, als $\frac{1}{9}$ desselben Dinges. Folglich mus auch hier der nach beiden Veränderungen hervorgekommene Bruch $\frac{2}{3}$ mit dem ersten $\frac{6}{9}$ einerlei Werth haben. Und da man ebenfals bei einem jeden andern Bruch, und einer jeden andern zum Divisor angenommenen Zahl, dieselbe Betrachtung anbringen kan: so ist auch dieser Saz algemein; **daß der Werth eines Bruches unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerlei Zahl dividirt werden.** (*)

 $\frac{2}{3}$ durch

(*) Auch dieser Saz läßt sich auf folgende Weise darthun:

Ich behaupte, daß z. B. $\frac{8}{12}$ eben so viel ist, als $\frac{2}{3}$, welcher leztere Bruch aus dem ersten hervorgebracht wird, indem man Zähler und Nenner durch einerlei Zahl, nemlich durch 4 dividirt.

Um sich davon zu überzeugen, so verschaffe man sich noch einen dritten Bruch, indem man blos den Zähler des ersten durch diese Zahl 4 dividirt, wodurch man den Bruch $\frac{2}{12}$ erhält. Nun ist offenbar

$\frac{8}{12}$ viermal mehr, als $\frac{2}{12}$, und ebenfals

auch $\frac{2}{3}$ viermal mehr, als $\frac{2}{12}$; folglich mus

nothwendig $\frac{8}{12}$ eben so viel, als $\frac{2}{3}$ sein.

$\frac{2}{3}$ durch 8 multipliciren, heißt nichts anders, als $\frac{2}{3}$ achtmal nehmen. $\frac{2}{3}$ 8 mal genommen, giebt aber ohne Zweifel $\frac{16}{3}$, und eben so ist $\frac{3}{7}.4$ (das ist $\frac{3}{7}$ durch 4 multiplicirt) gleich $\frac{12}{7}$, $\frac{5}{8}.3$ gleich $\frac{15}{8}$.

Wenn daher I. ein Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren ist; so erhält man das verlangte Produkt aus diesen beiden Zahlen, indem man den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl multiplicirt, und unter dieses Produkt den Nenner des Bruches als Divisor schreibt.

$8.\frac{2}{3}$ das ist, 8 durch $\frac{2}{3}$ multiplicirt, mus offenbar eben so viel geben, $\frac{2}{3}.8$; also mus auch $8.\frac{2}{3}$ geben $\frac{16}{3}$, $4.\frac{3}{7}$ geben $\frac{12}{7}$, $3.\frac{5}{8}$ geben $\frac{15}{8}$.

Sol daher II. eine ganze Zahl durch einen Bruch multiplicirt werden; so erhält man das verlangte Produkt, indem man die ganze Zahl durch den Zähler des Bruches multiplicirt, und unter dieses Produkt den Nenner des Bruches als Divisor schreibt.

Von dieser Regel kan man sich auch auf folgende Weise leicht überzeugen, wenn man bedenkt, daß $8.\frac{2}{3}$, das ist, 8 zwei Drittel mal genommen, nothwendig 3 mal weniger geben mus, als

8.2

8 . 2, das ist, 8 zwei mal ganz genommen. Da nun 8 . 2 giebt 16, so mus 8 . $\frac{2}{3}$ geben $\frac{16}{3}$, indem $\frac{16}{3}$ dreimal weniger ist, als 16, so wie $\frac{1}{3}$ dreimal weniger ist, als 1.

Wenn III. ein Bruch durch eine ganze Zahl z. B. $\frac{6}{5}$ durch 3 zu dividiren ist: so kan man entweder den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividiren, und unter diesen Quotienten den Nenner des Bruches als Divisor schreiben; oder den Nenner des Bruches durch die gegebene ganze Zahl multipliciren.

Nach der ersten Art erhält man zum Quotienten den Bruch $\frac{2}{5}$, welcher auch wirklich 3 mal kleiner ist, als $\frac{6}{5}$; nach der zweiten Art erhält man zum Quotienten den Bruch $\frac{6}{15}$, welcher ebenfals 3 mal weniger ist als $\frac{6}{5}$.

Sol IV. eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden; so multiplicire man die ganze Zahl durch den Nenner des Divisors, und schreibe unter dieses Produkt den Zähler des Divisors, so wird der auf diese Weise entstehende neue Bruch der verlangte Quotient sein.

Z. B. 5 dividirt durch $\frac{2}{3}$, giebt $\frac{15}{2}$.

 Denn

Denn 5 durch 2 dividirt würde geben $\frac{5}{2}$. Da nun aber der Divisor $\frac{2}{3}$ dreimal kleiner ist, als 2, so mus der Quotient aus 5 durch $\frac{2}{3}$ dividirt dreimal größer sein, als $\frac{5}{2}$, also giebt $\frac{15}{2}$ allerdings den verlangten Quotienten.

Wenn V. ein Bruch durch einen andern Bruch. Z. B. $\frac{4}{5}$ durch $\frac{3}{7}$ zu multipliciren ist: so kan man den Zähler des einen Bruches durch den Zähler des andern, und auch den Nenner des einen Bruches durch den Nenner des andern multipliciren; der dadurch entstehende neue Bruch, $\frac{12}{35}$, ist das verlangte Produkt aus den beiden Brüchen, $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7}$.

Denn $\frac{4}{5} \cdot 3$ würde geben $\frac{12}{5}$. Da nun aber in $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7}$ der eine Faktor, $\frac{3}{7}$, siebenmal kleiner ist, als 3; so mus auch das Produkt aus $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7}$ siebenmal kleiner sein, als das Produkt aus $\frac{4}{5} \cdot 3$. Es ist aber in der That $\frac{12}{35}$ siebenmal kleiner, als $\frac{12}{5}$, da $\frac{1}{35}$ siebenmal kleiner ist, als $\frac{1}{5}$.

Sol endlich VI. ein Bruch, $\frac{2}{3}$, durch einen andern, $\frac{4}{5}$, dividirt werden; wo also $\frac{2}{3}$ der Dividendus, $\frac{4}{5}$ der Divisor ist: so erhält man den Quotienten, wenn man den Divisor umgekehrt, stat $\frac{4}{5}$ also $\frac{5}{4}$ schreibt, und durch

diesen

diesen umgekehrten Divisor den Dividendus (nach V) multiplicirt. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$ also, oder $\frac{10}{12}$, ist der verlangte Quotient.

Denn $\frac{2}{3}$ durch 4 dividirt würde (nach III.) geben $\frac{2}{12}$. Da nun aber in $\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{5}$ dividirt, der Divisor $\frac{4}{5}$ fünfmal kleiner ist, als 4; so mus im Gegentheil der Quotient aus $\frac{2}{3}$, durch $\frac{4}{5}$ dividirt, fünfmal größer sein, als der Quotient aus $\frac{2}{3}$ durch 4 dividirt, welcher $\frac{2}{12}$ ist. Es ist aber in der That $\frac{10}{12}$ fünfmal größer, als $\frac{2}{12}$.

Erstes Kapitel.

Aufgaben, wobei die Anwendung der ersten algebraischen Grundsäze gelehret wird.

§. 1.

Wenn ich schreibe $5+2=7$; so heist das: 5 und 2 ist gleich 7. Eben so bedeutet folgender Ausdruk: $6+2+3=7+4$ nichts anders, als daß 6 und 2 und 3 zusammen addirt eben so viel geben, als 7 und 4 zusammen genommen.

§. 2.

Wenn ich aber schreibe, $7-2=5$; so wird das gelesen: 7 weniger 2 ist gleich 5.

Und folgender Ausdruk: $8-2-3=2+1$, sagt einerlei mit diesem, $8-5=3$.

§. 3.

Wenn ich sage, daß $x+3=9$; wie viel ist alsdann x? Antwort 6.

Wenn sein sol $x+2=9$; wie viel mus alsdan x sein? Antw. 7.

Wie viel bedeutet x, wenn $x+10=28+2$? Antwort: 20.

Wie viel, wenn $x - 2 = 6$? Antw. 8.

Was für eine Zahl bedeutet y
wenn $y + 2 - 3 = 8 - 2 + 5$? Antw. 12.
wenn $y - 5 = 20 - 8 - 2$? Antw. 15.
wenn $3 + y = 12 - 3$? Antw. 6.

§. 4.

Man pflegt das Zeichen (+) durch plus, und das Zeichen (—) durch minus auszusprechen; so daß man den Ausdruk, $5 + 4 - 3 = 6$, lieset: 5 plus 4 minus 3 ist gleich 6.

§. 5.

Wenn $2x = 12$ (zweimal x gleich ist 12); so mus x sein? Antw. 6.

In $3x = 12$, ist x? Antw. 4. Demnach ist
in $6x + 2 = 50$, $x = 8$.
in $5x - 3 = 32$, $x = 7$.

§. 6.

I. Aufgabe.

Ein Vater hinterläßt 3 Söhne, und ein Vermögen von 1200 Rthlr. Nach seinem Testamente sol der zweite Sohn 150 Rthlr. mehr bekommen, als der erste; der dritte Sohn wieder 150 Rthlr. mehr, als der zweite. Wie viel bekommt ein jeder?

§. 7.

Auflösung.

Man seze, es bekomme der erste Sohn
x thl. so mus erhalten
der zweite Sohn x thl. + 150 thl. und
der dritte Sohn x thl. + 300 thl. diese Erbtheile der 3 Söhne zusamen ——————
addirt, geben $3x$ thl. + 450 thl. Nun ist aber das Erbtheil aller 3 Söhne gleich der ganzen Verlassenschaft; also ist $3x + 450 = 1200$.

Wenn ich jezt in dieser Gleichung die 450 Rthlr. von der linken Seite wegnehme; so wird die rechte Seite um 450 Rthlr. größer bleiben, als die linke Seite. Um also beide Seiten wieder gleich zu machen, darf ich nur auch von der rechten Seite 450 Rthlr. abziehen. Alsdan erhalten wir

$3x = 750$, das ist, dreimal x ist gleich 750.

Folglich mus $1 . x$ der dritte Theil sein von 750, das ist, $\frac{750}{3} = 250$, und es bekomt

der erste Sohn x, das ist, 250 Rthlr.
der zweite Sohn $x + 150$, d. i. 400 Rthlr.
der dritte Sohn $x + 300$, d. i. 550 Rthlr.

Welche drei Erbtheile zusammen genommen das ganze Vermögen von 1200 Rthlr. geben.

§. 8.

Anmerkung.

Ein jeder Ausdruk, wie dieser: $3x + 450 = 1200$, oder $3x + 4 - 2 = 4 + 9 - 2x + 20$ heist eine

Gleichung; weil dadurch angedeutet wird, daß alle Größen, welche auf der linken Seite vor dem Zeichen der Gleichheit (=) stehen, zusammen genommen eben so viel geben, als alle Größen auf der rechten Seite hinter dem Gleichheitszeichen zusammen genommen. In folgender Gleichung

$$4x - 2x + 6 - 20 = 6x + 3 + 48$$

hat die linke Seite vier, die rechte Seite drei Glieder: denn eine jede Größe, welche von der nebenstehenden durch die Zeichen + oder — getrennt ist, heist ein Glied.

§. 9.

Diejenigen Glieder, welche das Zeichen + vor sich haben, heißen positive, diejenigen hingegen, welche das Zeichen — vor sich haben, negative Glieder. Wenn das erste Glied in einer Seite gar kein Zeichen vor sich hat; so ist es ein positives Glied.

§. 10.

II. Aufgabe.

Ein Vater hinterläst drei Söhne und eine Tochter. Diese sollen sich in einem Vermögen von 2800 Rthlr. dergestalt theilen, daß der älteste Sohn 100 Rthlr. mehr bekomt, als der zweite; der zweite Sohn 200 Rthlr. mehr, als der dritte, und der dritte Sohn 300 Rthlr. mehr, als die Tochter. Wie viel Rthlr. bekomt ein jedes Kind?

§. 11.

§. 11.

Auflösung.

Man seze:

das Erbtheil der Tochter sei $= x$ Rthlr. so ist
das Erbtheil des dritten Sohnes $= x + 300$
das Erbtheil des zweiten Sohnes $= x + 300 + 200$
und das Erbtheil des ersten Sohnes $= x + 300 + 200 + 100$.

Diese vier Erbtheile zusammen genommen betragen demnach

$$x + x + 300 + x + 300 + 200 + x + 300 + 200 + 100,$$

oder kürzer geschrieben: $4x + 1400$. Da nun alle 4 Erbtheile nothwendig dem ganzen Vermögen gleich sein müssen: so mus x gerade so genommen werden, daß $4x + 1400 = 2800$ wird, folglich mus

sein $4x = 1400$

und $x = \frac{1400}{4} = 350.$

Also bekömt die Tochter 350 Rthlr. der dritte Sohn 650 Rthlr. der zweite 850 Rthlr. und der älteste Sohn 950. Rthlr.

§. 12.

III. Aufgabe.

Eine Witwe sol sich mit ihren 2 Söhnen und 3 Töchtern in einem Vermögen von 11500 Rthlr. dergestalt theilen, daß ein Sohn 100 Rthlr. mehr, als eine Tochter, die Witwe selbst aber so viel, als alle 5 Kinder zusammen, und noch so viel, als ein Sohn

Sohn erhalte. Wie viel mus jedem Sohne, wie viel ieder Tochter, und wie viel der Witwe gegeben werden.

§. 13.

Auflösung.

Eine Tochter erhalte x Rthlr. so bekommen die 3 Töchter zusammen 3 x Rthlr.

Ein Sohn bekomt alsdan $x + 100$ und die beiden Söhne zusammen also $x + 100 + x + 100$, das ist, kürzer geschrieben, — $2x + 200$ Rthlr.

Die Witwe erhält nun erstlich so viel, als alle Kinder zusammen, welches $5x + 200$ rthlr. beträgt, und dazu noch so viel als ein Sohn, nämlich $x + 100$ rthlr. also überhaupt $5x + 200 + x + 100$, kürzer geschrieben — $6x + 300$ Rthlr.

Da nun die Summe aller dieser Erbtheile beträgt — $11x + 500$ Rthlr.

so mus x gerade so groß angenommen werden, daß $11x$ Rthlr. $+ 500$ Rthlr. $= 11500$ Rthlr. oder überhaupt $11x + 500 = 11500$ sei. Wenn dis sein sol, so mus nothwendig $11x = 11000$ (das ist Eilfmal $x = 11000$), also offenbar $1.x = 1000$ sein. Demnach bekomt

eine

eine Tochter 1000 Rthlr. daher die
3 Töchter zusammen — 3000 Rthlr.
ein Sohn 1100 Rthlr. daher die
2 Söhne zusammen — 2200 Rthlr.
die Witwe also 5200 Rthlr. und noch
1100 Rthlr. macht — 6300 Rthlr.
Dis zusammen genommen, giebt
richtig — — 11500 Rthlr.

§. 14.

IV. Aufgabe.

Eine Schuld von 4675 Rthlr. sol zu vier Terminen bezahlt werden, und zwar auf den zweiten Termin noch einmal so viel, als auf den ersten, und noch 100 Rthlr. auf den dritten, anderthalb mal so viel, als auf den zweiten; auf den vierten anderthalb mal so viel, als auf den dritten. Wie viel Rthlr. müssen an jedem Termine bezahlt werden?

§. 15.

Auflösung.

Wenn gezahlt werden
A. am ersten Termine x thlr. so müssen gezahlt werden
B. am zweiten — $2x + 100$
C. am dritten — $2x + 100 + x + 50$
D. am vierten — $2x + 100 + x + 50 + x + 50 + \frac{x}{2} + 25$

An allen vier Terminen zusammen $10x + \frac{x}{2} + 475$

Wenn ich nun für x eine solche Zahl annehme, daß $10x + \frac{x}{2} + 475$ gerade gleich wird 4675, oder welches

welches einerlei ist, daß folgende Gleichung $10x + \frac{x}{2} + 475 = 4675$ wirklich richtig ist; so können durch diesen Werth von x alle Forderungen der Aufgabe erfült werden.

Denn es kan offenbar die Summe $10x + \frac{x}{2} + 475$ wieder in die vier Theile aufgelöset werden, aus welchen sie zusammengesezt ist, und welche nach einander in den vier Reihen, A, B, C, D angegeben sind. In diesen vier Reihen aber sind die an den vier Terminen auszuzahlenden Theile gerade so angegeben, wie es in der Aufgabe verlangt wird, daß nämlich am zweiten Termin noch einmal so viel, als am ersten und noch 100 Rthlr. am dritten anderthalbmal so viel, als am zweiten ꝛc. angesezt ist. Wenn ich daher in allen diesen vier Reihen für jedes x den zur Richtigkeit der Gleichung $10x + \frac{x}{2} + 475 = 4675$ erforderlichen Werth desselben schreibe; so wird nicht nur die Eintheilung der Zahlungsgelder in den vier Terminen nach den Forderungen der Aufgabe richtig gemacht, sondern auch die Summe von allen diesen vier Theilen gerade die verlangte Zahl von 4675 Rthlr. sein.

Wir sagen also: es muß x gerade so angenommen werden, als es diese angesezte Grund-

gleichung erfordert. Nun können wir aber offenbar weiter schließen, daß wenn

$10x + \frac{x}{2} + 475 = 4675$, oder welches einerlei ist *), $\frac{21x}{2} + 475 = 4675$ sein sol, ganz nothwendig $\frac{21x}{2} = 4200$ sein müsse. Sol aber diese Gleichung richtig, das ist, die linke Seite einmal genommen der rechten Seite einmal genommen gleich sein; so muß offenbar auch die linke Seite derselben zwei mal genommen der rechten Seite zwei mal genommen gleich bleiben, also auch

$\frac{42x}{2} = 8400$, oder welches einerlei ist,

$21x = 8400$ sein. Wenn dis sein sol, so mus ferner nothwendig x der einundzwanzigste Theil von 8400, also $x = \frac{8400}{21} = 400$ sein.

§. 16.

Antwort: Es wird bezahlt

am ersten Termin x Rthlr.	=	400 Rthlr.
am zweiten $2x + 100$	=	900 —
am dritten $2x + 100 + x + 50$	=	1350 —
am vierten $2x + 100 + x + 50$ $+ x + 50 + \frac{x}{2} + 25$	=	2025 —

Diese 4 Theile geben zusamengenomen 4675 Rthlr.

und

(*) Denn es ist 10 x (zehnmal ganz x) offenbar so viel als $\frac{20x}{2}$ (20 mal halb x).

und es ist auch ferner, wie verlangt wurde, 900 = zweimal 400 und noch 100 Rthlr. 1350 = anderthalbmal 900, und 2025 = anderthalbmal 1350.

§. 17.

Der Ausdruk $4 . 8 = 32$, oder $4 \times 8 = 32$, wird gelesen 4 mal 8 ist gleich 32. Daher die beiden Zeichen (.) oder ($\times$) Multiplicationszeichen heißen, welche allemal anzeigen, daß die beiden Zahlen, zwischen welchen eines von beiden stehet, multiplicirt werden sollen, gerade so, wie der auch in der gemeinen Arithmetik gewöhnliche Divisions-Strich, z. B. in $\frac{8}{2}$, anzeigt, daß die 8 durch die 2 zu dividiren sei.

Daß $5x$ nichts anders heißen könne, als 5 mal x, und daß x so viel sei, als $1 . x$, versteht sich von selbst.

§. 18.

Der Ausdruk, $3 . (x - 2)$ oder $3 \times (x - 2)$ oder auch $3 (x - 2)$ bedeutet, daß die ganze Größe, welche in den beiden Klammern eingeschlossen ist, durch 3 multiplicirt, das ist, dreimal genommen werden sol. Es wird daher sein

$3(x - 2) = x - 2 + x - 2 + x - 2$,
oder $3(x - 2) = x + x + x - 2 - 2 - 2$,
oder $3(x - 2) = 3x - 6 = 3x - 3 . 2$.

Eben so ist

$$4(x - 2 + 5) = x - 2 + 5 + x - 2 + 5 + x - 2 + 5 + x - 2 + 5,$$

oder $4(x - 2 + 5) = 4x - 4 . 2 + 4 . 5$.

 §. 19.

§. 19.

Hieraus ergiebt sich folgende Regel: Wenn vor einer Parenthese eine Zahl als Multiplikator der ganzen Parenthese geschrieben ist, und man wil die Parenthese wegschaffen, oder unverwikkelt (explicite) multipliciren: so mus ein jedes Glied dieser Parenthese einzeln durch diese Zahl multiplicirt werden.

§. 20.

Man kan sich von der Richtigkeit dieser Regel auch auf folgende Weise überzeugen.

$3.(8+2)$ ist eigentlich so viel, als $3.(10)$, folglich mus $3.(8+2)=30$ sein: nun ist aber auch $3.8+3.2=24+6=30$.

Eben so ist $5(9-3)$ eigentlich $5.(6)$, daher mus $5(9-3)=30$ sein; es ist aber auch $5.9-5.3=45-15=30$.

§. 21.

Umgekehrt kan man also auch wieder einen mehren Gliedern gemeinschaftlichen Faktor herausziehen, und z. B.

stat $3.8-3.6+3.2$ schreiben $3.(8-6+2)$
stat $5.x-2x$ schreiben $(5-2)x$
stat $3x-x$ schreiben $(3-1)x$;

indem $3x-x$ so viel ist, als $3x-1.x$. Und wenn ich in dem Ausdrukke $(3-1)x$ unverwikkelt multiplicire nach §. 19; so komt wieder $3x-1.x$.

§. 22.

Der Ausdruk $\frac{8+4+6}{2}$ zeigt an, daß man die drei Glieder, welche über dem Divisionsstrich stehen, zusammengenommen durch 2 dividiren solle. Es ist also $\frac{8+4+6}{2} = \frac{18}{2} = 9$. Hieraus erhellet also, daß der Divisionsstrich mehre Zahlen zu einer gemeinschaftlichen Division eben so verbindet, wie es die Einschließungsklammer nach §. 19. zu einer gemeinschaftlichen Multiplikation thun.

Es ist ferner auch leicht einzusehen, daß man nun auch in jedes Glied einzeln oder explicite dividiren könne, und daß $\frac{8+4+6}{2} = \frac{8}{2} + \frac{4}{2} + \frac{6}{2}$ sein müsse; wovon wir uns durch folgende Betrachtung überzeugen können. Die drei Glieder, $8 + 4 + 6$, machen zusammengenommen die Zahl 18 aus. Wenn ich nun eine gewisse Zahl in drei Theile, wie hier die Zahl 18, in die drei Theile 8, 4, 6 zerlege, und von jedem dieser Theile die Hälfte nehme; so müssen diese drei Hälften aller drei Theile zusammengenommen, die Hälfte des Ganzen, die Hälfte der Zahl 18 geben.

Es hindert uns nichts, auch in folgendem Ausdrukke $\frac{12-3+6}{3}$ die drei Glieder, $12-3+6$, als drei Theile zu betrachten, in welche die Zahl 15 zerlegt ist: denn diese drei Glieder machen ja zusammengenommen die Zahl 15 aus. Es wird daher auch $\frac{12-3+6}{3} = \frac{12}{3} - \frac{3}{3} + \frac{6}{3}$ sein.

Eben so mus auch

$$\frac{4x-8+12}{4} = \frac{4x}{4} - \frac{8}{4} + \frac{12}{4} = x-2+3 \text{ sein.}$$

§. 23.

V. Aufgabe.

Es hat jemand eine Zahl in Gedanken. Nachdem er 1) dazu 5 addirt; 2) diese Summe durch 4 multiplicirt; 3) von diesem Produkte 8 abgezogen; und 4) den Rest durch 4 dividirt hat; so komt die Zahl 15: was für eine Zahl hat er in Gedanken gehabt?

§. 23.

Auflösung.

Die Zahl sei x: dazu 1) 5 addirt, giebt $x+5$; diese Summe 2) durch 4 multiplicirt, giebt $4(x+5)$ oder $4x+20$; davon 3) 8 abgezogen, bleibt $4x+12$; diese Differenz endlich 4) durch 4 dividirt, giebt $\frac{4x+12}{4}$ oder $x+3$. Nun ist in der Aufgabe gesagt, daß nach allen diesen Operationen

rationen zulezt 15 herausgekommen sei. Mit der Zahl x haben wir alle die nämlichen Operationen gemacht, welche der andere mit der ausgedachten gemacht hat. Nehmen wir also x dergestalt an, daß $x + 3 = 15$, so giebt der für x angenommene Werth eine Zahl, welche nach allen den vier angegebnen Operationen 15 hervorbringt. Es kan aber $x + 3 = 15$, nicht anders sein, als wenn $x = 12$ angenommen wird; folglich ist 12 die ausgedachte Zahl.

Hätte der andere, nachdem er alle die angegebnen Operationen vorgenommen, 20 herausgebracht, so müste, wenn widerum x die ausgedachte Zahl bedeutet, $x + 3 = 20$ daher $x = 17$ sein.

§. 24.

VI. Aufgabe.

In einer Geselschaft von 4 Personen hatte sich ein jeder für sich eine Zahl ausgedacht. Nachdem ein jeder 1) zu seiner Zahl addirt hatte 10; diese Summe 2) multiplicirt durch 6, von diesem Produkte 3) abgezogen 30, und den bleibenden Rest 4) dividirt durch 3; so hatte die erste Person 18, die andere 16, die dritte 14, und die vierte 12. Welche Zahl hatte sich jeder ausgedacht?

§. 25.

Auflösung.

Man nehme eine Zahl x. Was für eine Zahl auch dieses x bedeuten mag, so wird doch, wenn 1) 10 dazu addirt wird, die Summe sein $x + 10$,

diese Summe 2) durch 6 multiplicirt, geben $6x + 60$; davon 3) 30 abgezogen, bleiben $6x + 30$; und dies 4) durch 3 dividirt herauskommen $2x + 10$. Wenn nun x die Zahl der ersten Person bedeuten sol, so mus sein $2x + 10 = 18$, daher mus sein $2x = 8$, und ein x, die Zahl der ersten Person, $= 4$.

Sol x die Zahl der zweiten Person bedeuten, so mus sein $2x + 10 = 16$, daher sein $2x = 6$, und $x = 3$.

Für die dritte Person ist $2x + 10 = 12$, daher $2x = 2$, und $x = 1$.

Auch folgende ähnliche Uebung kan für Anfänger angenehm und nüzlich sein.

§. 26.

Nachdem sich jemand 2 Zahlen ausgedacht, und neben einander die eine zur linken, die andere zur rechten geschrieben hat; so lasse man ihn 1) zu beiden Zahlen 4 addiren; 2) darauf eine jede von diesen beiden Summen durch 3 multipliciren; 3) das, was nun auf der linken Seite steht, zu demjenigen, was jezt auf der rechten steht, addiren; 4) zu der Zahl, die in der linken Kolonne steht, 12 addiren; darauf 5) in beiden Kolonnen durch 3 dividiren, und noch 6) zu der untersten Zahl in der linken Kolonne diejenige ausgedachte Zahl, welche man zur rechten geschrieben hat, addiren: so wird nun in beiden Kolonnen einerlei Zahl stehen; so verschieden auch die beiden Zahlen sein mögen, welche man sich anfangs ausgedacht hat.

§. 27.

Denn wenn diese beiden ausgedachten Zahlen x und y, genant werden, so werden wir durch die vorgeschriebenen Operationen nach und nach erhalten:

1) $x + 4$, $y + 4$
nach 2) $3x + 12$, $3y + 12$
nach 3) . . . . , $3y + 3x + 24$
nach 4) $3x + 24$, ...
nach 5) $x + 8$, $y + x + 8$
nach 6) $x + y + 8$, $y + x + 8$. Nun mus aber nothwendig sein $x + y + 8 = y + x + 8$, was auch x und y für Zahlen sein mögen.

§. 28.
VII. Aufgabe.

Ich habe 3 Zahlen: 1) Die beiden ersten zusammenaddirt geben 10; 2) die Summe der zweiten und dritten, ist 28; 3) die Summe der dritten und ersten ist 24. Welches sind die 3 Zahlen?

§. 29.
Auflösung.

Die erste sei x, die zweite y, die dritte z; so ist nach der Aufgabe

1) $x + y = 10$
2) $y + z = 28$
3) $x + z = 24$

Also $2x + 2y + 2z = 62$, oder, den gemeinschaftlichen Faktor 2 herausgezogen (§. 21.)

$2(x + y + z) = 62$,

daher mus sein $x+y+z=31$ (einmal $(x+y+z)$ gleich halb 62)
und nun bleibt, da $x+y=10$, für z übrig 21,
und, da $y+z=28$, für x übrig 3,
und, da $x+z=24$, für y übrig 7.
Und es ist, wie verlangt wurde,

$$3+7=10,\ 7+21=28,\ 3+21=24.$$

§. 30.

VIII. Aufgabe.

Es werden vier Zahlen gesucht, welche so beschaffen sind, daß 1) die Summe der drei ersten ist $=53$, 2) die Summe der drei leztern ist $=86$, 3) die Summe der beiden lezten und der ersten $=67$, 4) die Summe der lezten und der beiden ersten $=58$.

§. 31.

Auflösung.

Wir wollen diese vier noch unbekanten Zahlen der Ordnung nach bezeichnen durch x, y, z, u; so ist

1) $x+y+z=53$
2) $y+z+u=86$
3) $z+u+x=67$
4) $u+x+y=58$

daher $3x+3y+3z+3u=264$
oder $3(x+y+z+u)=264$
oder $3(x+y+z+u)=3.88$, indem $3.88=264$.
daher $x+y+z+u=88$

Nun

Nun ist $x + y + z = 53$, daher bleibt für u übrig 35
$y + z + u = 86$, —— x — 2
$z + u + x = 67$, —— y — 21
$u + x + y = 58$, —— z — 30

§. 32.

IX. Aufgabe.

Man sol zwei Zahlen finden, deren eine um 6 grösser ist, als die andere, und welche beide zusammenaddirt 24 geben.

§. 33.

Auflösung.

Es sei die kleinere Zahl x, so beträgt die grössere so viel, als $x + 6$, und die Summe dieser beiden Zahlen ist $2x + 6$. Da nun nach Forderung der Aufgabe die Summe dieser beiden Zahlen 24 sein sol; so mus x dergestalt angenommen worden, daß $2x + 6 = 24$ werde. Wenn wir aber nun annehmen, daß diese Gleichung richtig, daß ist, in dieser Gleichung die linke Seite der rechten vollkommen gleich ist; so müssen beide Seiten ganz nothwendig auch alsdan noch gleich bleiben, wann wir von jeder Seite gleich viel, nemlich 6 abziehen, welches dadurch geschieht, daß wir auf beiden Seiten das Glied — 6 hinzusezen. Es ist also auch

$$2x + 6 - 6 = 24 - 6,$$

das ist, $2x = 24 - 6$, indem $+ 6 - 6$ offenbar 0 ist.

Sol

Sol aber diese Gleichung richtig, das ist, 2 x einmal genommen, gleich sein 24 — 6 einmal genommen; so mus auch die Hälfte der linken Seite gleich der Hälfte der rechten Seite,

das ist, $\frac{2x}{2} = \frac{24 - 6}{2}$

oder $x = \frac{24 - 6}{2}$

das ist, $x = \frac{18}{2} = 9$ sein.

Antw. Die kleinere Zahl ist 9, die größere 9 + 6, das ist 15.

§. 34.

X. Aufgabe.

Man sol zwei Zahlen finden, wovon die eine um die Zahl a größer ist, als die andere, und welche beide zusammengenommen die Summe b geben.

§. 35.

Auflösung.

Es sei die kleinere Zahl x, so beträgt die größere so viel als x + a, beide zusammen addirt geben also 2 x + a. Es mus also für x eine solche Zahl angenommen werden, daß 2 x + a = b werde. Sobald wir annehmen, daß diese Gleichung richtig ist; so müssen wir zugestehen, daß auch folgende 2 x + a — a = b — a noch richtig bleiben müsse; indem diese leztere von der ersten nicht weiter unterschieden ist, als daß man jede

Seite

um gleich viel, nämlich um die Zahl a, kleiner gemacht hat. Da nun + a und — a sich dergestalt aufheben, daß allemal + a — a = o wird, was für eine Zahl auch a bedeuten mag; so haben wir, daß 2 x = b — a sein müsse. Folglich mus auch

sein $\frac{2x}{2} = \frac{b - a}{2}$

das ist, $x = \frac{b - a}{2}$

§. 36.

Diese Formel $x = \frac{b - a}{2}$ zeigt an, daß man jedesmal die kleinere Zahl x erhalte, wenn man die gegebne Zahl a, um welche die eine gesuchte Zahl größer sein sol, als die andere, von der gegebenen Summe beider Zahlen (b) abzieht, und das was übrig bleibt durch 2 dividirt.

Wenn z. B. wie in der vorigen Aufgabe, gegeben ist a = 6 und b = 24, so wird

$x = \frac{24 - 6}{2} = \frac{18}{2} = 9.$

Wenn gegeben würde a = 4, b = 30; so wäre $x = \frac{30 - 4}{2} = \frac{26}{2} = 13.$

§. 37.

XI. Aufgabe.

Zwei Zahlen zu finden, wovon die eine um 10 größer ist, als die andere, und deren Summe = 40.

§. 38.

Auflösung.

Diese Aufgabe läst sich nun nach der eben gefundenen Formel sogleich beantworten, ohne daß man eine neue Auflösung nöthig hat. Es wird nämlich in diesem Falle sein die kleinere gesuchte Zahl $x = \frac{40 - 10}{2} = \frac{30}{2} = 15$, folglich die größere 25.

§. 39.

Der Ausdruk, $\frac{a + b - 8}{4}$, zeigt an, daß die drei Zahlen, welche über den Divisionsstrich stehen, zusammen genommen, und von der ganzen Größe, welche durch diese Zusammennehmung entsteht, der vierte Theil genommen werden sol. Ich behaupte, daß $\frac{a + b - 8}{4} = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} - \frac{8}{4}$ sei. Denn wenn ich eine Größe in drei Theile zertheile, und von jedem dieser Theile das Viertel nehme; so müssen alle diese Viertel zusammen genommen den vierten Theil der ganzen Größe geben. Eben so ist auch $\frac{m - n + 5 + b}{5} = \frac{m}{5} - \frac{n}{5} + 1 + \frac{b}{5}$. Umgekehrt kan ich also auch stat $\frac{x}{6} + \frac{nx}{6}$ allemal schreiben $\frac{x + nx}{6}$.

§. 40.

XII. Aufgabe.

Ich kam mit einem Korbe vol Aepfel unter einen Haufen von Kindern, die ich nicht überzählt hatte. Nachdem ich von meinen ebenfals nicht gezählten Aepfeln einem jeden Kinde 6 Aepfel gegeben hatte, so behielt ich nur 12 Aepfel übrig. Ich ließ mir darauf alle Aepfel zurük geben, und gab nun jedem Kinde nur 4 Aepfel, da behielt ich 44 Aepfel übrig. Wie viel Aepfel habe ich gehabt, und wie viel Kinder waren da?

§. 41.

Auflösung.

Man seze, die Anzahl der Kinder sei $= x$; so brauche ich 6 mal x Aepfel, um jedem Kinde 6, und 4 mal x Aepfel, um jedem Kinde 4 Aepfel zu geben. Daher ist

$6x + 12 =$ der Anzahl meiner Aepfel,
und auch $4x + 44 =$ der Anzahl meiner Aepfel.

Daraus folgt offenbar,

daß $6x + 12 = 4x + 44$, und von beiden Seiten 12 abgezogen, daß $6x = 4x + 32$, ferner, von beiden Seiten noch $4x$ abgezogen, daß $2x = 32$, folglich $1 . x = 16$.

Kennt man nur erst die Anzahl der Kinder, so läst sich leicht auch die Anzahl der Aepfel angeben; sie ist nämlich $6 . 16 + 12$, das ist, 108, oder auch $4 . 16 + 44$, welches ebenfals 108 giebt.

§. 42.

§. 42.

Solche Säze, welche man sogleich für wahr erkent, sobald man nur versteht, was sie sagen sollen, und welche nicht aus andern Säzen, deren Wahrheit man noch deutlicher einsicht, erwiesen werden können, heißen Grundsäze. Dahin gehören folgende:

§. 43.

Grundsaz.

Wenn zwey Größen einer dritten gleich sind; so sind sie einander selbst gleich. z. B.

Wenn Karl so groß ist, als Frize, und August auch so groß ist, als Frize; so müssen auch Karl und August gleich groß sein.

Alle Handwerker arbeiten nach diesem Grundsaze. Der Schuster wendet ihn wenigstens zweimal an, wenn er einen Schuh für einen Fus macht; denn er mus nothwendig von folgenden Säzen und Schlüssen überzeugt sein.

Die Form des Fußes ist	=	der durch meine Maaße bestimten Form.
Die Form des Leistens ist	=	der durch meine Maaße bestimten Form.

Also ist die Form des Fußes	=	der Form des Leistens.
Wird nun die Form des Schuhes	=	der Form des Leistens gemacht;
so mus die Form des Fußes	=	der Form des Schuhes sein.

Nach diesem Grundsaze schlossen wir in der vorigen Aufgabe, daß die beiden Größen $6x + 12$, und $4x + 44$ einander gleich sein müsten, weil jede von ihnen gleich war einer dritten Größe, nämlich der Anzahl meiner Aepfel.

§. 44.

XIII. Aufgabe.

Ich hatte Geld, weiß aber nicht wie viel; indessen fehlten mir 12 Gr. um in einer Geselschaft jeder Person 6 Gr. zu geben. Nachdem ich aber jeder Person nur 4 Gr. gegeben hatte; so blieben mir 2 Gr. übrig. Wie viel Personen waren in der Geselschaft, und wie viel Groschen hatte ich?

§. 45.

Auflösung.

Die Anzahl der Personen sei x; so brauche ich, um jeder Person 6 Gr. zu geben, 6 mal x Gr. War nun $6x$ Gr. gleich meinem Gelde? das nicht;

sondern

es war 1) $6x - 12$ Groschen $=$ der Anzahl meiner Groschen

und auch 2) $4x + 2$ Groschen $=$ der Anzahl meiner Groschen

daraus folgt offenbar, daß $6x - 12 = 4x + 2$.

Wenn wir in dieser Gleichung von beiden Seiten $+ 4x$ abziehen, oder wie man auch in der Algebra zu reden pflegt, das Glied $- 4x$ zu beiden Seiten hinzusezen; so müssen nothwendig auch nach diesem gleichen Abzuge beide Seiten noch gleich bleiben, wenn sie es vor diesem Abzuge waren. Also haben wir

$$6x - 4x - 12 = 4x - 4x + 2;$$

oder da $6x - 4x$ so viel als $2x$

und $4x - 4x = 0$ ist,

folgende Gleichung

$$2x - 12 = 2.$$

Sezen wir nun ferner, um das Glied $2x$ allein auf der linken Seite zu haben, zu beiden Seiten $+ 12$ hinzu; so müssen beide Seiten auch nach diesem gleichen Zusaze gleich bleiben, wenn sie es vor diesem Zusaze waren, und wir haben

daß $2x - 12 + 12 = 2 + 12$

oder $2x = 14$

daher $x = 7$.

Antwort:

Antwort: Es waren 7 Personen. Um die Anzahl meiner Groschen zu erhalten, darf ich nur in einer von den beiden ersten Gleichungen bei 1) oder 2) stat x den gefundenen Werth 7 schreiben. Nach der Gleichung bei 2), wonach $4x + 2 =$ der Anzahl der Groschen, erhält man dadurch, daß $4 . 7 + 2 = 30$ die Anzahl meiner Groschen sei. Man sieht es auch ohne Mühe ein, daß mir bei 30 Gr. 1) gerade 12 Gr. fehlten, um einer jeden von 7 Personen 6 Gr. zu geben, wozu ich 6 . 7, das ist, 42 Gr. gebraucht hätte; und daß ich 2) 2 Gr. übrig behalten muste, wenn ich einem jeden nur 4 Gr. gab, wozu ich nicht mehr als $4 . 7 = 28$ Gr. nöthig hatte.

§. 46.

Wir wollen uns nun bemühen, noch einige von denen Grundsäzen zu entwikkeln, wonach wir in der vorhergehenden Auflösung geschlossen haben. Wir sagten z. B. wenn $2x - 12 = 2$, so ist ganz gewis auch $2x - 12 + 12 = 2 + 12$, indem wir zu beiden Seiten gleich viel, nämlich 12 hinzugesezt haben, und man wird gewis kein Bedenken tragen, die algemeine Wahrheit des folgenden Sazes einzugestehn.

§. 47.

Grundsaz.

Wenn zu einer jeden von zweien gleichen Größen gleich viel addirt wird; so

sind auch die beiden dadurch entstehenden Summen einander gleich.

z. B. Da $8 = 5 + 3$
und $5 = 4 + 1$

so wird auch $8 + 5 = 5 + 3 + 4 + 1$ sein.

Wenn $y = m + n$
und $x = 2y + a$

so wird auch $x + y = 2y + a + m + n$ sein.

§. 48.

Grundsaz.

Gleiches von gleichem abgezogen, läst gleiche Reste; das ist, wenn von zwei gleichen Größen gleich viel abgezogen wird; so mus von beiden Größen gleich viel übrig bleiben.

Z. B Da $7 + 3 = 6 + 4$
und $3 = 3$

so mus auch $7 + 3 - 3 = 6 + 4 - 3$
das ist $7 = 6 + 4 - 3$ sein.

Wenn $a = 6$
und $b = 2$

so wird auch $a - b = 4$ sein.

§. 49.

So wie $2x$ gelesen wird 2 mal x, eben so bedeutet auch ax so viel, als $a \cdot x$, oder $a \times x$, das ist, a mal x, und überhaupt sind alle Zahlen, welche ohne

ohne irgend ein Zeichen neben einander geschrieben sind, als Faktoren anzusehen, dergestalt, daß p q r so viel ist, als p.q.r, oder p ⋊ q ⋊ r, das ist, p mal q mal r. Wil man aber z. B. schreiben 2 mal 3, so mus man das Zeichen nicht vergessen, sondern schreiben 2.3, oder 2 ⋊ 3, indem wegen der bekanten Decimalordnung 23 so viel bedeutet, als 20 + 3.

§. 50.

XIV. Aufgabe.

Es fehlen mir b Groschen, um in einer gewissen Geselschaft einem jeden a Gr. geben zu können; es bleiben mir aber d Gr. übrig, wenn ich einem jeden nur c Gr. gebe. Wie viel Personen waren da, und wie viel Groschen hatte ich?

§. 51.

Vorbereitung.

Wenn x Personen vor mir stehen, und ich wil jeder Person 4 Gr. geben, so brauche ich für alle x Personen? Antwort: 4x (4 mal x Gr.)

Wenn ich jedem geben wil 1 Gr. so brauche ich? Antw. x (einmal x Gr.)

Wenn ich jedem geben wil 6 Gr. so brauche ich? Antw. 6x (das ist, sechsmal x Gr.)

Wenn ich jedem geben wil a Gr. so brauche ich? Antw. ax (das ist, a mal x Gr.)

Wenn ich jedem geben wil c Gr. so brauche ich? Antw. cx (das ist, c mal x Gr.)

Um jedem zu geben x Gr. würd ich brauchen? Antw. xx (das ist, x mal x Gr.)

§. 52.

Auflösung.

Demnach ist 1) $ax - b = z$, wenn z die Anzahl meiner Gr. bedeutet.
und auch 2) $cx + d = z$

Also ist (§. 43.) $ax - b = cx + d$. Diese Gleichung mus (§. 48.) noch richtig bleiben, wenn ich von beiden Seiten cx abziehe, oder welches einerlei ist, das Glied $- cx$ zu beiden Seiten hinzuschreibe; dadurch erhalten wir

$ax - cx - b = cx - cx + d$, das

ist $ax - cx - b = d$: zu beiden Seiten $+ b$ addirt, bleibt

ferner (§. 47.) $ax - cx - b + b = d + b$

das ist $ax - cx = d + b$

oder $(a - c) x = d + b$. (*)

Wenn nun jezt die ganze linke Seite der ganzen rechten Seite gleich ist; so mus auch der zweite, dritte . . . (a—c) te Theil der linken Seite, dem zweiten, dritten . . . (a—c) ten Theil der rechten Seite gleich sein

das ist $\frac{(a-c)x}{a-c} = \frac{d+b}{a-c}$

Wie

(*) Denn es ist $ax - cx = (a - c) x$, eben so wie §. 21. gezeigt worden,

daß $5x - 2x = (5 - 2) x$.

Wie nun aber ist $\frac{3 \cdot 4}{3} = 4$, $\frac{5 \cdot 8}{5} = 8$, $\frac{6 \cdot x}{6} = 6$; so ist auch $\frac{(a-c)x}{a-c} = x$; und so können wir demnach schreiben,

daß $x = \frac{d+b}{a-c}$ sei.

§. 53.

Diese Formel deutet an, daß die Zahl, um welche ich bei der ersten Vertheilung zu wenig hatte (die Zahl b) zu derjenigen Zahl, welche angiebt, wie viel ich bei der zweiten Vertheilung übrig behielt (nämlich d) addiren, und diese Summe durch die Differenz (a — c) dividiren müsse, um x, das ist, die Anzahl der Personen zu finden.

Wenn wir z. B. die vorige XIII. Aufgabe, wo alle diese Zahlen in bestimten Zahlen gegeben sind, mit dieser XIV. Aufgabe vergleichen; so sehen wir, daß in jener Aufgabe gesezt wurde

$a = 6$, $b = 12$, $c = 4$, $d = 2$.

Schreiben wir nun in der zulezt herausgebrachten Formel $x = \frac{d+b}{a-c}$ diese bestimte Zahlen 6, 12, 4, 2, stat der algemeinen Zahlen a, b, c, d, so ergiebt sich die Zahl der Personen für die XIII. Aufgabe $= \frac{2+12}{6-4} = \frac{14}{2} = 7$.

Wäre gegeben a = 8, b = 16, c = 3, d = 19; so wäre $x = \frac{16+19}{8-3} = \frac{35}{5} = 7$.

Für a = 7, b = 2, c = 3, d = 12, komt $x = \frac{12-2}{7-3} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$; also müsten drittehalb Personen da gewesen sein, wo die halbe Person nichts anders bedeuten kan, als eine Person, welche nur halb so viel als eine jede andere erhält.

§. 54.

Grundsaz.

Wenn zwei Größen einmal genommen gleich sind; so sind auch ihre *Dupla*, *Tripla*, *Quadrupla*, 2c. einander gleich. Z. B.

Wenn $x = a + b$

so ist auch $2x = 2(a + b) = 2a + 2b$

auch $3x = 3(a + b) = 3a + 3b$

überhaupt auch $nx = n(a + b)$, was auch n für eine Zahl bedeuten mag.

§. 55.

Grundsaz.

Wenn zwei Größen einmal genommen gleich sind; so sind auch die Hälften, die Drittel, die Viertel, 2c. dieser beiden Größen einander gleich. Z. B.

Wenn

Wenn $2y = a + b$

so ist auch $\frac{2y}{2} = \frac{a + b}{2}$

auch $\frac{2y}{3} = \frac{a + b}{3}$

und überhaupt $\frac{2y}{n} = \frac{a + b}{n}$, was auch n für eine Zahl bedeuten mag.

§. 56.

Nachdem man eine vorgelegte Aufgabe gehörig überdacht, und die darin gethanen Forderungen durch die festgesezten Zeichen der vorzunehmtnden Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ausgedrükt und in eine Gleichung gebracht hat: so mus man darauf bedacht sein, aus dieser angesezten Grundgleichung, durch solche Veränderungen, wodurch die einmal festgesezte Gleichheit beider Seiten nicht gestört wird, endlich eine Gleichung herzuleiten, worinn der Werth der unbekanten Zahl durch die andern bekanten Zahlen angegeben und deutlich bestimt wird. Diese Absicht wurde erreicht in der XII. Aufgabe, durch die lezte Gleichung $x = \frac{b - a}{2}$, in der leztern XIV. Aufgabe durch die lezte Gleichung $x = \frac{d + b}{a - c}$, und wird offenbar allemal erreicht durch eine solche Gleichung, deren eine Seite nur die

die unbekante Zahl, und deren andere Seite lauter bekante Zahlen enthält.

§. 57.

Wie man nun aus einer jeden Gleichung von der Art, wie wir sie fürs erste nur bekommen werden, durch gehörige Veränderungen allemal eine solche Gleichung herleiten können, das wollen wir an folgender Gleichung bei A) lernen.

A) $bx + a - b = cf - 2x + gx.$

§. 58.

Wir werden unserm Ziele näher gekommen sein, wenn wir

I) alle diejenigen Glieder, worinnen sich bloß bekante Zahlen finden, von der einen Seite weggeschaft haben. In dieser Absicht wollen wir zu beiden Seiten $- a + b$ hinzusezen; so wird nach §. 47. noch bleiben

B) $bx + a - b = cf - 2x + gx - a + b$
$- a + b$

das ist C) $bx = cf - 2x + gx - a + b$

§. 59.

Halten wir diese Gleichung bei C) mit der ersten bei A) zusammen; so fält in die Augen, daß diese leztere bei C) aus der ersten bei A) hervorgebracht wird, wenn man das Glied $+ a$ von der linken Seite wegnimt und mit entgegengeseztem

Zeichen,

Zeichen, als $-$ a, auf die rechte Seite schreibt, und eben so auch das Glied $-$ b von der linken Seite wegnimt, und mit entgegengesezten Zeichen, als $+$ b, auf die rechte Seite schreibt.

§. 60.

Nachdem wir auf diese Weise alle Glieder von blos bekanten Zahlen auf die rechte Seite gebracht haben; so werden wir die bekanten Zahlen von den unbekanten noch mehr dadurch absondern können, daß wir

II. Die unbekanten Glieder von der rechten Seite weg und auf die linke Seite hinbringen. In dieser Absicht wollen wir zu beiden Seiten der Gleichung bei C) die Glieder $-x + gx$ mit entgegengesezten Zeichen als $+2x - gx$ hinzusezen; so werden nach diesem gleichen Zusaze nicht nur beide Seiten noch gleich bleiben, so, daß

D) $bx + 2x - gx = cf - 2x + gx - a + b$ ist $+2x - gx$;

sondern es wird auch $-2x + 2x + gx - gx = 0$, folglich diese Gleichung bei D einerlei mit folgender sein

E) $bx + 2x - gx = cf - a + b$

§. 61.

Wenn wir mit der Gleichung bei C diese leztere bei E zusammen halten; so bemerken wir (wie §. 59.) daß auch hier die leztere Gleichung bei E

aus

aus der vorhergehenden bei C entsteht, wenn in der ersten Gleichung bei C ein jedesunbekante Glied von der rechten Seite weggestrichen und auf die linke Seite mit entgegenseztem Zeichen geschrieben wird. Aus dieser nnd der §. 59 gemachten Bemerkung ergiebt sich also folgende

Algemeine Regel.

§. 62.

Daß man in jeder Gleichung ein jedes beliebiges Glied von der einen Seite wegnehmen, und auf die andere mit entgegengeseztem Zeichen schreiben kan; ohne daß die Gleichheit der beiden Seiten dadurch aufgehoben wird.

§. 63.

Ist man durch Anwendung dieser Regel mit einer Gleichung so weit gekommen, daß sich alle Glieder, worinnen die unbekante Zahl vorkomt, auf einer Seite, und alle übrigen bekanteu Glieder auf der andern Seite befinden; so mus man ferner noch darauf bedacht sein,

III) alle diejenigen bekanten Zahlen, welche etwan noch als Faktoren oder Divisoren mit der unbekanten Zahl verbunden sind, durch eine geschikte Division oder Multiplikation ebenfals von dieser Seite wegzubringen, welches allemal geschehen kan, indem man z. B. auf folgende Art schließt:

Wenn

Wenn sein sol $mx = a + q$; so mus auch sein $\frac{mx}{m} = \frac{a+q}{m}$ (§. 55.)

das ist $x = \frac{a+q}{m}$ sein.

Oder: wenn $\frac{x}{n} = r + s$ sein sol; so mus

auch $\frac{n.x}{n} = n(r+s)$ sein, (§. 54.)

das ist $x = n(r+s)$ sein.

§. 64.

Hätte aber die Gleichung nach Anwendung der §. 63. gegebenen Regel auf der einen Seite mehr als ein unbekantes Glied erhalten, wie es bei unserer zulezt herausgebrachten Gleichung (§. 60.)

E) $bx + 2x - gx = cf + b - a$

der Fal ist; so kan nun allemal der allen dreien Gliedern gemeinschaftliche Faktor, welches hier x ist, nach §. 21. herausgezogen, und stat der Gleichung bei C folgende geschrieben werden:

F) $(b + 2 - g)x = cf + b - a$.

Nach dieser kleinen Veränderung des Ausdrukkes besteht die linke Seite allemal aus zwei Faktoren. Der eine ist die unbekante Zahl, der andere enthält lauter bekante Zahlen. Man dividirt nunmehr durch diesen bekanten Faktor, und schließet, daß wenn die Gleichung bei F richtig ist, oder

richtig

richtig sein sol, auch nach dieser Division sein müsse G) $\frac{(b+2-g)\,x}{b+2-g} = \frac{cf+b-a}{b+2-g}$,

das ist $x = \frac{cf+b-a}{b+2-g}$.

Dis ist nun die verlangte Gleichung, worin x durch lauter bekante Zahlen bestimt ist. Eine solche Gleichung, welche uns die Verbindung verschiedener Zahlen unter einander, und besonders die Art, wie x aus den gegebenen Zahlen entsteht, deutlich vor Augen legt, pflegt man auch eine Formel zu nennen, (und die Entwikkelung einer solchen Formel, die Auflösung einer Gleichung.)

§. 65.

Es ergiebt sich aus den beiden vorhergehenden §. §. folgende algemeine Regel:

Eine jede (auch aus mehren Gliedern zusammengesezte) Zahl, welche die eine ganze Seite einer Gleichung multiplicirt, kan von dieser Seite weggenommen, und als ein Divisor der andern Seite angesezt werden, und umgekehrt eine jede Zahl, welche eine ganze Seite dividirt, von dieser Seite weggenommen, und als ein Multiplikator der andern Seite angesezt werden ohne daß die Gleichheit beider Seiten aufgehoben wird.

§. 66.

XV. Aufgabe.

Ich bin jezt alt 24 Jahr; du, Frize, bist jezt alt 9 Jahr. Ich bin also jezt mehr als noch einmal, oder, wie man auch zu reden pflegt, mehr als zweimal so alt, als du: nach wie viel Jahren wird, wenn wir beide fortleben, die Zahl meiner Jahre gerade nur noch einmal so gros sein, als die Zahl deiner Jahre?

§. 67.

Vorbereitung.

Nach x Jahren bin ich alt 24 + x Jahre, und Frize ist nach x Jahren ohne Zweifel alt 9 + x Jahre. Wenn ich demnach x so groß annehme, daß $2(x + 9) = 24 + x$ wird; so giebt die Zahl x die Zahl der Jahre an, nach deren Verfließung die Forderung der Aufgabe erfült wird.

§. 68.

Auflösung.

Sol aber nun $2(x + 9) = 24 + x$, oder welches einerlei ist, $2x + 18 = 24 + x$ sein; so mus auch (§. 62.) $2x = 24 + x - 18$, ferner auch (§. 62.) $2x - x = 24 - 18$, das ist $x = 24 - 18 = 6$ sein.
In der That muß auch nach 6 Jahren Frize 15 Jahr und ich 30 Jahr alt, also ich gerade noch einmal so alt als Frize sein.

§. 69.

§. 69.

XVI. Aufgabe.

Johan ist alt a Jahre, August alt b Jahre; wenn, oder nach wie viel Jahren wird Johan n mal so alt sein als August?

§. 70.

Vorbereitung.

Johan, der jezt a Jahre alt ist, wird nach x Jahren alt sein $a + x$ Jahre; und August, der anjezt b Jahre alt ist, wird nach x Jahren alt sein $b + x$ Jahre. Sol nun x die in der Aufgabe verlangte Zahl von Jahren sein, nach welchen Johan gerade n mal so alt sein sol, als August; so mus x so groß genommen werden, daß $a + x = n(b + x)$ wird.

§. 71.

Auflösung.

Sol aber $a + x = n(b + x)$, oder welches einerlei ist, $a + x = nb + nx$ sein; so mus auch (§. 62.) $a - nb + x = nx$, und ferner

(§. 62.) $a - nb = nx - x$,

das ist, $a - nb = nx - 1 . x$, oder den gemeinschaftlichen Faktor x herausgezogen,

$a - nb = (n - 1) x$, folglich auch

(§. 65.) $\frac{a - nb}{n - 1} = x$ sein.

§. 72.

Es sei $a = 24$, $b = 9$, $n = 2$; so ist $x = \frac{24 - 2.9}{2 - 1} = 6$, welches eben der Werth ist, welcher in der vorigen Aufgabe für x gefunden wurde.

Wie gros wird x nach dieser Formel, wenn $a = 63$, $b = 12$, $n = 4$? Antw. 5.

§. 73.

Man gebe sich selbst verschiedene Werthe für die Zahlen a, b, n; so wird man noch deutlicher sehen, wie man durch Hülfe einer solchen algemeinen Formel bei allen ähnlichen Aufgaben mit leichter Mühe die gesuchte Zahl bestimmen kan, ohne daß man nöthig hat, die ganze Auflösung jedesmal zu wiederholen.

§. 74.

Wenn man aber solche Werthe für die Zahlen a, b, n, ohne alle Bedachtsamkeit angiebt; so kan es treffen, daß das, was in der Aufgabe verlangt wird, bei den angegebnen Zahlen gar nicht möglich ist. Wenn uns z. B. die Frage vorgelegt würde: Johan ist alt 20 Jahr, Friedrich alt 12 Jahr; nach wie viel Jahren wird Johan zweimal so alt sein, als Friedrich? — so sehen wir leichte ein, daß der Fal gar nicht mehr vorkommen kan, und immer weniger möglich wird, je älter beide werden. Wir wollen indessen dennoch diese un-

möglich scheinende Forderung in einer Gleichung ausdrükken und auflösen, wie in der (XV) Aufgabe, damit man siehet wie die Algebraische Rechnungsart in solchen Fällen zurechte weiset. Es sol nach dieser Forderung

sein $20 + x = 2(12 + x)$

oder $20 + x = 24 + 2x$; folglich

mus auch $20 = 24 + x$

und ferner $20 - 24 = x$

das ist $-4 = x$ sein.

§. 75.

Wir hätten also herausgebracht, daß der Zeitpunkt, in welchem der verlangte Fal Stat fände, von jezt an entfernt sei um -4 Jahre. So wie nun in der XV. Aufgabe die lezte Gleichung $x = 6$ andeutete, daß das Verlangte nach 6 Jahren Stat fände; so bedeutet hier $x = -4$ gewis nichts anders, als daß das Verlangte vor 4 Jahren zugetroffen. Und in der That war Johan, welcher jezt 20 Jahr ist, vor 4 Jahren alt 16; und Friedrich, welcher jezt 12 Jahr ist, vor 4 Jahren alt 8 Jahr.

§. 76.

XVII. Aufgabe.

Ich bin alt 30 Jahr, Friedrich 10, und Karl 8 Jahr: nach wie viel Jahren wird Karls und Friedrichs Alter zusammen genommen gerade gleich sein dem meinigen?

Auflösung.

§. 76.

Auflösung.

x sei die gesuchte Zahl von Jahren; so mus sein

$$30 + x = 10 + x + 8 + x$$

also auch $30 = 18 + x$

und $30 - 18 = 12 = x$.

§. 77.

XVIII. Aufgabe.

In einem Wirthshause waren Männer und Weiber, zusammen 12 Personen. Ein Man verzehrte für 7 Gr. eine jede Frau für 5 Gr. und die ganze Zeche belief sich auf 3 Rthlr. 4 Gr. Wie viel Männer und wie viel Weiber waren da?

§. 78.

Auflösung.

Die Anzahl der Männer sei x; so ist die Anzahl der Weiber 12 — x. Ein Man verzehrt für 7 Gr. folglich verzehren x Männer für 7 x Gr. Eine Frau verzehrt für 5 Gr. folglich verzehren (12 — x) Frauen für 5 (12 — x) Gr.. Also ist

$7x$ Gr. $+ 5(12 - x)$ Gr. $=$ 3 Rthlr. $+$ 4 Gr.

oder $7x$ Gr. $+ 60$ Gr. $- 5x$ Gr. $= 76$ Gr.

also überhaupt (*) $7x + 60 - 5x = 76$

das ist $2x + 60 = 76$

(*) Denn wenn $7x$ gr. $+ 60$ gr. $- 5x$ gr. $= 76$ gr. sein sol, so wird auch $7x$ th. $+ 60$ th. $- 5x$ th. $= 76$ th.

auch $7x$ El. $+ 60$ El. $- 5x$ El. $= 76$ Ellen.

also überhaupt $7x \cdot 1 + 60 \cdot 1 - 5x \cdot 1 = 76 \cdot 1$ sein müssen.

folglich $2x = 16$, und $1.x$, das ist, die Anzahl der Männer $= 8$. Die Anzahl der Weiber dahero $= 12 - 8$, das ist $= 4$.

§. 79.

XIX. Aufgabe.

Eine Geselschaft, welche aus 8 Männern, 6 Frauen und 10 Kindern besteht, wil zu einem gemeinschaftlichen Vergnügen 10 Rthlr. zusammenbringen, so daß ein Kind dreimal weniger, als eine Frau, eine Frau aber 4 Gr. weniger, als ein Man gibt. Wie viel mus jedes geben?

§. 80.

Auflösung.

Ein Kind gebe x Gr. so giebt eine Frau $3x$ Gr. und ein Man $3x$ Gr. $+ 4$ Gr. und es mus sein

$10x$ Gr. $+ 6 . 3x$ Gr. $+ 8(3x + 4)$ Gr. $= 10$ Rthlr.

oder $10x$ Gr. $+ 18x$ Gr. $+ 24x$ Gr. $+ 32$ Gr. $= 240$ Gr.

folglich überhaupt $52x + 32 = 240$

also $52x = 240 - 32 = 208$

daher $x = \frac{208}{52} = 4$.

Antwort:

müssen, was auch diese Einheit, 1, für eine Größe bedeuten mag. Hieraus sehen wir, daß eine solche Einheit keinen weitern Einflus in die Bestimmung der Zahl x hat, und ganz aus der Acht gelassen werden kan, wenn sie in allen Gliedern einer Gleichung dieselbe ist.

Antwort: Ein Kind gibt 4 Gr. eine Frau 3.4 Gr. das ist 12 Gr. ein Man (3.4+4).1 Gr. das ist, 16 Gr.

§. 81.

XX. Aufgabe.

Es hat jemand 12 Stük Tuch verfertigen lassen, worunter 2 weisse, 3 schwarze und 7 blaue sind. Es kostet ein Stük schwarzes Tuch 2 Rthlr. mehr, als ein weisses, und ein Stük blaues Tuch 3 Rthlr. mehr, als ein schwarzes, und alle 12 Stük zusammen kosten 140 Rthlr. wie viel kostet ein weisses, wie viel ein schwarzes und wie viel ein blaues Stük?

§. 82.

Auflösung.

Man seze, Ein weisses koste x Rthlr. so kosten die 2 weissen $2x$ Rthlr.

Ein schwarzes kostet alsdan $x + 2$ Rthlr., also die 3 schwarzen $3x + 6$ Rthlr.

Ein blaues kostet alsdann $x + 5$ Rthlr., also die 7 blauen $7x + 35$ Rthlr.

Alle zusammen kosten demnach $12x + 41$, und man hat $12x + 41 = 140$

daher ist $12x = 99$

$x = \frac{99}{12} = 8\frac{1}{4}$ Rthlr.

Es kostet also

Ein weisses

$8\frac{1}{4}$ Rthlr. daher die 2 weissen $16\frac{2}{4}$ Rthlr.

Ein schwarzes

$10\frac{1}{4}$ Rthlr. daher die 3 schwarz. $30\frac{3}{4}$ Rthlr.

Ein blaues

$13\frac{1}{4}$ Rthlr. daher die 7 blauen $91\frac{7}{4}$ Rthlr.

und alle 12 zusammen $137 + \frac{12}{4} = 140$ Rthlr.

§. 83.

XXI. Aufgabe.

Zwei Knaben, Klaus und Franz, haben etliche Pfennige. Nachdem 1) Klaus an Franz einen Pfennig abgegeben hatte, so hatten beide gleich viel. Hätte aber stat dessen Franz an Klaus einen Pfennig gegeben, so hätte alsdan Klaus gerade noch einmal so viel gehabt, als Franz. Wie viel hatte ein jeder?

§. 84.

Auflösung.

Es habe gehabt Klaus x Pfennige und Franz y Pfennige; so hat, nachdem Klaus an Franz einen Pfennig gegeben, Klaus noch $x - 1$ und Franz $y + 1$ Pfennig, und es ist

1) $x - 1 = y + 1$.

Hätte aber Franz von seinen y Pf. an Klaus, der x Pf. hatte, einen abgegeben; so hätte behalten Franz $y - 1$ Pf. und Klaus gehabt $x + 1$ Pfennig.

Und

Und da in diesem Falle Klaus noch einmal so viel haben solte als Franz; so mus sein

$$\text{II)}\ x + 1 = 2(y - 1).$$

Wir haben also folgende zwei Grundgleichungen;

I) $x - 1 = y + 1$ II) $x + 1 = 2y - 2$

aus der ersten folgt aus der zweiten

daß $x = y + 2$ daß $x = 2y - 3$

aus welchen beiden Gleichungen sich diese neue Gleichung ergiebt $y + 2 = 2y - 3$. Daher

ferner $2 = 2y - y - 3$,

das ist $2 = y - 3$,

also $2 + 3 = y$ sein mus. Wir wissen demnach, daß $y = 5$ sei. Schreiben wir nun in eine von den vorigen Gleichungen, worinn sowohl x als y enthalten waren, z. B. in $x = y + 2$, stat y den gefundenen Werth desselben, 5; so ergiebt sich $x = 5 + 2 = 7$.

Antwort. Klaus hatte 7 Pfennige und Franz 5 Pfennige.

§. 85.

XXII. Aufgabe.

Ein Maulesel und ein Esel tragen ein jeder etliche Pud. Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maulesel: wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal so viel als du. Darauf antwortet der Maulesel: wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal so viel als du. Wie viel Pud trug der Esel, wie viel der Maulesel?

§. 86.

Auflösung.

Man seze, der Esel trug x Pud, der Maulesel y Pud; so ist

I) $x+1=2(y-1)$ II) $(x-1)3=y+1$
oder $x+1=2y-2$, $3x-3=y+1$

Man hat hier wieder, wie in der vorigen Aufgabe, zwei unbekante Größen, aber auch zwei Gleichungen. Man suche demnach die eine unbekante Größe, mit welcher es am leichtesten ist, sowohl in der einen als in der andern Gleichung, allein auf der einen Seite der Gleichung zu erhalten: hier ergiebt sich aus

der ersten Gleichung $x=2y-3$,
und aus der zweiten $x=\frac{y+4}{3}$,

und schließe nun wieder: da $2y-3$ gleich ist x und $\frac{y+4}{3}$ ebenfals gleich ist x; so mus nothwendig sein (§. 43.) $2y-3=\frac{y+4}{3}$. Was nun einmal genommen gleich ist, das ist auch dreimal genommen gleich; also ist

$$3(2y-3)=\frac{3(y+4)}{3}$$

oder $6y-9=y+4$
y abgezogen bleibt $5y-9=4$
9 addirt, kömt $5y-9+9=4+9$
oder $5y=13$,
daher mus sein $y=\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$.

Nach-

Nachdem der Werth von y bekant ist, so läst sich der Werth von x durch eine von den vorigen Gleichungen bestimmen, worinnen x und y enthalten ist, welches desto leichter wird, je einfacher die Gleichung ist, welche man dazu gebraucht. Man schreibe hier in der Gleichung $x = 2y - 3$, stat y den gefundenen Werth desselben $\frac{13}{5}$; so erhält man sogleich $x = \frac{26}{5} - 3 = 5\frac{1}{5} - 3 = 2\frac{1}{5}$.

Antwort: Der Esel trug $2\frac{1}{5}$, der Maulesel $2\frac{3}{5}$ Pud, womit die Probe leicht zu machen ist.

§. 87.

XXIII. Aufgabe.

Es hat jemand 2 silberne Becher und einen Dekkel dazu. Der erste Becher, welcher 12 Loth schwer ist, wiegt 1) mit dem Dekkel, dessen Gewicht unbekant ist, zusammen zweimal so viel, als der andere Becher. Der andere Becher, dessen Gewicht ebenfals unbekant ist, wiegt 2) mit dem Dekkel zusammengenommen dreimal so viel, als der erste Becher. Wie viel wiegt der Dekkel und wie viel der zweite Becher?

§. 88.

Auflösung.

Es wiege der Dekkel x Loth, der zweite Becher y Loth; so ist

I) $12 + x = 2y$ und II) $y + x = 36$

also $x = 2y - 12$ $\qquad$ $x = 36 - y$.

 folglich

folglich ist $2y - 12 = 36 - y$, auf beiden Seiten y addirt, $3y - 12 = 36$

$+ 12$ addirt, $3y = 48$

$y = \frac{48}{3} = 16$.

Da nun $x = 36 - y$; so ist $x = 36 - 16 = 20$.

Antwort: Der Dekkel wiegt 20 Loth, der zweite Becher 16 Loth.

§. 89.

XXIV. Aufgabe.

Frize und Karl haben Nüsse. Nachdem I) Frize an Karln a Nüsse gegeben hatte; so hatten beide gleich viel. Hätte aber stat dessen II) Karl an Frizen b Nüsse gegeben; so hätte alsdann Frize n mal so viel Nüsse gehabt, als Karl. Wie viel Nüsse hatte Frize, wie viel hatte Karl?

§. 90.

Auflösung.

Es habe gehabt Frize x und Karl y Nüsse; so wird

I) $x - a = y + a$ und II) $x + b = n(y - b)$

sein. Man bringe nun in jeder Gleichung diejenige von den beiden unbekanten Grössen, mit welcher es am leichtesten wird, ganz allein auf die eine Seite; so erhält man aus der

ersten Gleichung $x = y + 2a$, aus der

zweiten Gleichung $x = ny - nb - b$, daher denn

sein mus $y + 2a = ny - nb - b$.

Daher

Daher auch $2a + nb + b = ny - y$

oder (§. 21) $2a + (n+1)b = (n-1)y$

also (§. 65) $\frac{2a + (n+1)b}{n-1} = y$

Gesezt nun, daß gegeben wäre $a = 5$, $b = 4$, $n = 7$; so wird $y = \frac{2 . 5 + (7+1) 4}{7-1} = \frac{42}{6} = 7$.

Nachdem man auf diese Art die unbekante Zahl y gefunden hat, so läst sich nunmehro auch die andere x bestimmen, indem man in der Gleichung $x = y + 2a$, stat y den gefundenen Werth desselben, nämlich 7 schreibt; wodurch sich ergiebt, daß $x = 7 + 2 . 5 = 17$ sei.

§. 91.

XXV. Aufgabe.

Man hat eine beliebige Anzahl von solchen numerirten Kästchen, wie Fig. 1, welches aufs höchste 9 Schiebladen enthalten darf, deren jede in mehrere kleine Fächer abgetheilt ist. Nach Fig. 2 sind darinnen 6 Reihen von Fächern, und jede Reihe hat 8 Fächer; doch kan man jeder Schieblade bis zu 9 Reihen und jeder Reihe aufs höchste 9 Fächer geben. In meiner Abwesenheit ist ein Stük Geld, ein Ring oder dergleichen in einem beliebigen Fache verstekt: ich sol durch eine künstliche Rechnung die Zahl des Kastens, der Schieblade, der Reihe und des Faches finden, wo das Verstekte liegt.

§. 92.
Auflösung.

Ich lasse 1) zur Zahl des Kastens 9 addiren, diese Summe 2) durch 10 multipliciren, zu diesem Produkte 3) die Zahl der Schieblade addiren, diese Summe 4) durch 10 multipliciren, dazu 5) die Zahl der Reihe addiren, von dieser Summe 6) die Zahl 6 abziehen, den bleibenden Rest 7) durch 10 multipliciren, 8) die Zahl des Faches dazu addiren und von dieser Summe 9) noch 7 abziehen. Nur diese zulezt übrig bleibende Zahl wird mir angegeben, und nachdem ich selbst von derselben 10) 8933 abgezogen habe; so wird eine Zahl übrig bleiben, welche in ihrer ersten Decimalstelle die Zahl des Faches, in der zweiten Decimalstelle, die Zahl der Reihe, in der dritten, die Zahl der Schieblade und in den noch übrigen höhern Decimalstellen, die Zahl des Kästchens hat. Z. B. Wenn nach den vorgeschriebenen 9 Operationen die Zahl 21476 herausgekommen und mir angegeben wäre; so würd ich davon 8933 abziehen und aus der übrigbleibenden Zahl 12543 schließen, daß das Verstekte im 12ten Kasten, in der 5ten Schieblade, in der 4ten Reihe und in derselben 3tem Fache zu finden sei. Um uns von der algemeinen Richtigkeit dieser Auflösung zu überzeugeu, wollen wir nennen die Zahl des Kastens k, die Zahl der Schieblade s, die Zahl der Reihe r, die Zahl des Faches f, so werden wir durch die angegebenen 9 Operationen nach und nach erhalten wie folget:

1) k

1) $k+9$, 2) $10k+90$, 3) $10k+90+s$,
4) $100k+900+10s$, 5) $100k+900+10s+r$,
6) $100k+900+10s+r-6$, das ist,
$100k+894+10s+r$,
7) $1000k+8940+100s+10r$,
8) $1000k+8940+100s+10r+f$,
9) $1000k+8933+100s+10r+f$,

Nachdem ich nun davon die 8933 abziehe; so bleibt mir

10) $1000.k+100.s+10.r+f$.

Wenn wir nun, so wie man stat 3.1000 schreibt 3000, stat, 5.100 schreibt 500, so auch hier stat k.1000 schreiben k000, stat s.100 schreiben s00, und stat r.10 schreiben r0; so fält deutlich in die Augen, daß alle diese Glieder

$$\begin{array}{r} k000 \\ +\ s00 \\ +\ r0 \\ +\ f \end{array}$$

nach den gewöhnlichen Additionsregeln für die Decimalzahlen zusammenaddirt eine Summe geben müssen, in deren erster Decimalstelle die Zahl des Faches f, in deren zweiter Decimalstelle die Zahl der Reihe r, u. s. w. stehen mus; wenn keine der Zahlen f, r, s, grösser als 9 angenommen wird.

§. 93.

§. 93.

Man könte indessen die Zahl f, r, s auch alsdan noch entdekken, wenn der Kasten 10 Schiebladen, jede Schieblade 10 Reihen und jede Reihe 10 Fächer hätte. Denn wenn man sich denkt, daß eine von diesen 3 Zahlen z. B. die r zur 10 würde; so würde alsdenn die zweite Decimalstelle gar keine Zahl, also 0 enthalten. Eine 0 zeigt demnach allemal an, daß die Zahl 10, die für diejenige Stelle, wo sich die 0 befindet, gehörige Zahl, und von der in der nächsthöhern Decimalstelle befindlichen Zahl also 1 abzuziehen sei, um die eigentlich dahin gehörige Zahl zu erhalten. Z. B. Wenn ich nach allen 10 Operationen erhalten hätte 19080, so würde durch diese Zahl angedeutet: das 10te Fach, die 7te Reihe, die 10te Schieblade, der 18te Kasten.

Durch 17000 würde angedeutet das 10te Fach, die 9te Reihe, die 9te Schieblade, der 16te Kasten.

Zweites

Zweites Kapitel.
Nähere Vorbereitung zur algebraischen Addition und Subtraktion.

§. 94.
XXVI. Aufgabe.

Nachdem ich 6 Jahre in Besoldung gestanden, und in den ersten drei Jahren jährlich nur 300 Rthlr. mit jedem folgenden Jahre aber immer 100 Rthlr. mehr ausgegeben, und das übrige von meinen Einkünften beigelegt hatte; so habe ich ein Kapital von 2600 Rthlr. erspart. Wie hoch war meine jährliche Besoldung?

§. 95.
Auflösung.

Sie sei x Rthlr. so habe ich in jedem der drei ersten Jahre beigelegt $(x - 300)$ Rthlr. in den drei ersten Jahren zusammen also beigelegt $3x - 900$ Rthlr. in dem 4ten, $x - 400$, in dem 5ten $x - 500$, in den 6sten $x - 600$; folglich in allen 6 Jahren zusammen

$$3x - 900 + x - 400 + x - 500 + x - 600;$$

das ist $6x - 2400$. Also ist $6x - 2400 = 2600$

daher $6x = 5000$

und $x = \frac{5000}{6} = 833\frac{1}{3}$ Rthlr.

§. 96.

XXVII. Aufgabe.

Zwei Oerter M und N (Fig. 3) liegen e Meilen von einander entfernt. Den 15ten Mai ist jemand von N nach M zu abgereiset, welcher täglich c Meilen zurüklegt; nach b Tagen schikt man diesem Reisenden einen Boten von M aus entgegen, welcher täglich a Meilen geht: wenn und wie weit von M wird der Bote den Reisenden treffen?

§. 97.

Auflösung.

Man seze, der Bote gehe x Tage bis er den Reisenden in dem Punkte O trift; so ist der Reisende, welcher b Tage früher schon seine Reise angetreten hat, überhaupt $b + x$ Tage unterwegens. Der Bote geht jeden Tag a Meilen, folglich in x Tagen $a x$ Meilen. Der andre Reisende macht jeden Tag c Meilen, folglich in $(b + x)$ Tagen, $c(b + x)$ Meilen. Die beiden Wege des Reisenden und des Boten müssen zusammengenommen nothwendig der ganzen Entfernung der beiden Oerter gleich sein; folglich mus sein

$a x$ Meilen $+ c(b + x)$ Meilen $=$ e Meilen

also überhaupt $a x + c(b + x) = e$

oder $a x + b c + c x = e$

daher $a x + c x = e - b c$

oder $(a + c) x = e - b c$

daher $x = \frac{e - b c}{a + c}$ Also giebt $\frac{e - b c}{a + c}$

die

die Anzahl der Tage an, nach welchen der Bote von dem Tage seines Ausganges angerechnet den Reisenden antrift, und $a \times \frac{e - bc}{a + c}$, die Anzahl der Meilen, um welche der Ort der Zusammenkunft von M entfernt ist.

§. 98.

Für den Fal da gegeben wäre $e = 114$, $c = 8$, $b = 2$, $a = 6$, würde also

$$x = \frac{114 - 8 . 2}{6 + 8} = \frac{98}{14} = 7$$ gefunden werden.

In diesen 7 Tagen geht nun der Bote 6 . 7, das ist, 42 Meilen, und so weit mus der Ort der Zusammenkunft O von M entfernt liegen. Der Reisende, welcher 2 Tage früher als der Bote, also überhaupt 9 Tage auf der Reise gewesen ist, hat in diesen 9 Tagen 8 . 9, das ist 72 Meilen, also gerade den Weg N O zurükgelegt, und befindet sich zu gleicher Zeit mit dem Boten in O.

§. 99.

XXVIII. Aufgabe.

Den 11ten Junius ist von Königsberg nach Dessau zu ein Reisender abgegangen, welcher jeden Tag 5 Meilen zurüklegt, und den 14ten Junius wird diesem Reisenden von Dessau aus ein Bote entgegen geschikt, welcher täglich 7 Meilen gehen sol; wenn und wie weit von Dessau wird der Bote

den Reisenden treffen: wenn man annimt, daß Königsberg um 91 Meilen von Dessau entfernt ist?

§. 100.

Man sieht sehr leichte, daß diese Aufgabe nur ein einzelner bestimter Fal der vorigen algemeinen Aufgabe ist, und daß man nur $e = 91$, $c = 5$, $b = 3$, $a = 7$ zu sezen habe, um nach der algemeinen Formel $x = \frac{e - bc}{a + c}$ auch für diesen Fal die Zahl der Tage zu finden, nach welchen der Bote den Reisenden treffen mus. Es wird auf diese Art gefunden $x = \frac{91 - 15}{12} = \frac{76}{12} = 6\frac{1}{3}$ Tag. Der Bote legt in diesen $6 + \frac{1}{3}$ Tagen $7\,(6 + \frac{1}{3})$ Meilen, das ist $42 + \frac{7}{3} = 44\frac{1}{3}$ Meilen zurük, und so weit liegt also der Ort der Zusammenkunft O von Dessau entfernt. Der Reisende aus Königsberg ist 3 Tage früher als der Bote, also überhaupt $(9 + \frac{1}{3})$ Tage auf der Reise, bis er vom Boten in O angetroffen wird, und da er jeden Tag 5 Meilen reiset; so macht er in dieser Zeit einen Weg von $5\,(9 + \frac{1}{3}) = 45 + \frac{5}{3} = 46 + \frac{2}{3}$ Meilen, und mus also, da $44 + \frac{1}{3} + 46 + \frac{2}{3} = 91$ ist, allerdings mit dem Boten in O zusammentreffen.

§. 101.

XXIX. Aufgabe.

Ein Schif fährt den ersten Mai von der Insel I Fig. 4. nach Osten zu, und legt einen Weg von 30 Meilen

Meilen zurük. Den folgenden 2ten Mai fährt es anfangs wieder nach Osten noch 8 Meilen fort, wird aber darauf durch einen Ostwind zurük nach Westen getrieben um 12 Meilen. In der Nacht zwischen dem 2ten und 3ten Mai wird es verschlagen, man weis nicht wie weit, noch in welcher Richtung. Nachdem man aber am folgenden Tage wieder mit günstigem Westwinde nach Osten zu 40 Meilen gesteuert hat; so findet man sich bei einer andern Insel i welche von der ersten I, um 10 Meilen westwärts liegt. **Wie viel Meilen, und in welcher Richtung ist man in der Nacht vom 2ten bis zum 3ten gefahren?**

Vorbereitung.

Wenn man die Grösse einer Bewegung nach Westen zu mit + bezeichnet; so kan man füglich die gerade entgegengesezte Richtung einer Bewegung nach Osten zu durch das Zeichen — anzeigen. Denn wenn ich von einem Orte vier Meilen nach Westen zu gehe, und gehe darauf wieder 4 Meilen gerade zurük nach Osten; so bin ich wieder auf dem ersten Flekke, und bin mit diesen beiden Bewegungen um nichts weiter gekommen. Nun ist aber auch $+4-4=0$; wo die 0 anzeigt, daß ich mich durch diese beiden Bewegungen von meinem ersten Orte um nichts, weder nach Westen noch nach Osten hin entfernt habe.

Ginge ich aber 8 Meilen westwärts (+8) und 6 Meilen zurük Ostwärts (—6); so müste

ich darauf von dem Orte meines Ausgehens noch um 2 Meilen nach Westen hin entfernt bleiben: es giebt aber auch + 8 — 6 = + 2; wo durch + 2 die 2 Meilen westwärts angezeigt werden. Ginge ich 10 Meilen westwärts, und darauf 16 Meilen gerade zurük nach Osten; so müste ich nach diesen beiden Bewegungen 6 Meilen nach Osten zu von dem Orte, wo ich ausgegangen war, entfernt sein. Es giebt aber auch + 10 — 16 = — 6. In unserer Aufgabe wollen wir, weil dis gleichgültig ist, die Bewegungen nach Osten zu durch + und daher die entgegengesezten Bewegungen nach Westen zu durch — bezeichnen.

§. 102.

Auflösung.

Wir haben demnach der Ordnung nach folgende Bewegungen des Schiffes. Am ersten Mai + 30, am 2ten + 8 und — 12, in der folgenden Nacht eine unbekante Länge in unbekanter Richtung ... x, den dritten Mai + 10.

Nun ist mit allen diesen Bewegungen zusammengenommen das Schif bis an die Insel i gekommen, welche von der ersten Insel I noch 20 Meilen westwärts liegt. Demnach mus

sein + 30 + 8 — 12 ... x 10 + = — 20.

das ist + 36 ... x = — 20

Folglich ... x = — 56, welches anzeigt, daß das Schif in der Nacht vom 2ten bis zum 3ten überhaupt um 56 Meilen nach Westen verschlagen ist.

§. 103.

§. 103.

Man könte die Gleichung auch folgendermassen ansezen: Das Schif ist mit den wirklich gemachten Bewegungen bis in i gekommen: wenn es also ferner noch 20 Meilen nach Osten zu gesegelt wäre, so würde es von I um nichts entfernt, also $30 + 8 - 12 \ldots x + 10 + 20 = 0$ sein. Diese Gleichung ist mit der vorhin angesezten $30 + 8 - 12 \ldots x + 10 = -20$ völlig einerlei, und beide bestimmen einerlei Werth für $\ldots x$

§. 104.

Auf gleiche Art kan man die entgegengesezte Beziehung, in welcher Einnahme und Ausgabe, Schulden und ausstehende Kapitalien, Druk und Gegendruk, Zug und Gegenzug, Ausfließen und Einfließen u. d. g. stehen, durch die beiden Zeichen + und — andeuten. Z. B. Wenn ich 100 Rthlr. Schulden, und 60 Rthlr. ausstehendes Kapital habe; so bin ich eigentlich nur 40 Rthlr. schuldig. Bezeichnet man nun die Zahl, welche die Schuld angiebt, durch —, und die Zahl des ausstehenden Kapitals durch +; so zeiget in $-100 + 60 = -40$, die -40 an, daß ich, beides zusammengenommen, 40 Rthlr. schuldig bin. Oder bezeichnet man das schuldige Geld durch +, das vorräthige aber durch —; so erhält man $+100 - 60 = +40$; wo nun die $+40$, vierzig Rthlr. Schuld anzeigen.

§. 105.

Wenn 60 Maß Wasser in ein Gefäß durch eine Röre hinein, und 20 Maß durch eine andere wieder ausgeflossen sind; so ist es so gut, als ob nur 40 Maß hineingeflossen wären. Sezt man nun vor der Zahl der einfließenden Quantität Wassers das Zeichen +, vor der Zahl des ausfließenden Wassers das Zeichen —; so zeigt in $+60 - 20 = -40$ die Zahl $+40$ an, daß 40 Maß Wasser mehr eingeflossen, als ausgeflossen; folglich auch 40 Maß in dem Gefäße zurükgeblieben sind.

Drittes Kapitel.

Von der algebraischen Addition und Subtraktion.

§. 106.

Wenn ich mehrere Zahlen, eine jede mit demjenigen Zeichen, welches ihr wegen der Natur derjenigen Sache, dessen Grösse sie ausdrükt, in Beziehung auf eine andere zukömt, zusammen schreibe; so heist dis algebraisch addiren, und die ganze Reihe von Gliedern, welche dadurch entsteht, ist eine algebraische Summe. Z. B. Ich habe 60 Rthlr. vorräthiges Geld, 20 Rthlr. Schulden,

100 Rthlr. noch zu bezahlendes, 30 Rthlr. einzunehmendes Geld und 200 Rthlr. ausstehendes Kapital; so ist folgende Reihe, 60 Rthlr. — 20 Rthlr. — 100 Rthlr. + 30 Rthlr. + 200 Rthlr. die algebraische Summe aller dieser Grössen.

Man sagt ja auch schon im gemeinen Leben: Einnahme und Ausgabe, Schulden und Kapitalien, Inventarium, ꝛc. zusammengenommen haben wir so und so viel. In einem solchen Zusammennehmen mehrer Größen besteht die algebraische Addition.

§. 107.

Demnach erhält man die algebraische Summe mehrer Zahlen sogleich dadurch, daß man alle diese Zahlen, eine jede mit dem ihr zukommenden Zeichen, als Glieder einer Reihe nebeneinander schreibt, und es ist,

von $3a - 4bc + d - 28 + \frac{2b}{n} + mn + 9fg$

und $5a - 2bc - d + 30 - gh + mn - 6fg$

die Summe $5a + 3a - 4bc - 2bc + d - d - 28 + 30 + \frac{2b}{n} - gh + mn + mn + 9fg - 6fg.$

oder kürzer geschrieben:

$$8a - 6bc + 2 + \frac{2b}{n} - gh + 2mn + 3fg:$$

indem es weit bequemer und deutlicher ist

$8a$, als $5a + 3a$, $-6bc$, als $-4bc - 2bc$ u. s. w. zu schreiben.

§. 108.

Daß eine algebraische Summe öfters kleiner werden mus, als ein Theil der Summe, fält von selbst in die Augen. Die Summe von 80 Rthlr. Schuld und 100 Rthlr. vorräthigem Gelde ist 20. Die Summe von 100 Rthlr. Schuld und 80 Rthlr. vorräthigem Gelde ist — 20.

§. 109.

Es ist aber zu merken, daß man in der Algebra zu sagen pflegt: — 2 sei kleiner, als + 2, und zwar um 4 kleiner: denn erst — 2 und + 4 dazu genommen ist gleich 2. Mit eben dem Rechte kan man also auch sagen, daß — 8 kleiner sei, als — 6, und zwar um 2, denn — 8 + 2 gibt — 6; noch viel mehr ist — 8 kleiner als + 6; denn ich mus noch + 14 zu — 8 hinzusezen, um + 6 zu erhalten.

§. 110.

Sieht man indessen bloß auf die Menge der Einheiten, welche durch die Zahlen angedeutet werden (absolute), ohne auf die Beschaffenheit und gegenseitige Beziehung der Größen, oder auf die Zeichen +, —, Rüksicht zu nehmen; so ist es allerdings ausgemacht, daß — 8 absolute grösser als — 6, — 8 absolute grösser ist als + 6.

§. 111.

Algebraisch subtrahiren heißt zu zwei gegebenen Zahlen oder Zahlensummen eine dritte finden,

welche

welche angiebt, um wie viel die eine gegebne von der andern unterschieden ist.

§. 112.

Von den beiden gegebenen Zahlen heist die eine, von welcher abgezogen wird, der Subtrahendus, die andere, welche abgezogen wird, der Subtrahent, und die dritte gefundene Zahl, welche angiebt, um wie viel der Subtrahent von dem Subtrahendus unterschieden ist, heist die Differenz, oder der Rest (residuum.)

§. 113.

Es mus daher offenbar der Subtrahent und die Differenz zusammengenommen, das ist algebraisch addirt, den Subtrahendus geben; und umgekehrt mus diejenige Zahl, welche mit dem Subtrahenten zusammengenommen den Subtrahendus giebt, die richtige Differenz sein.

§. 114.

Wenn ich 2 Zahlen A und B habe, welche aus mehren Gliedern bestehen können, und alle Zeichen der B in die gerade entgegengesezten verkehre, und mit so verkehrten Zeichen die B zur A addire; so mus die dadurch entstehende Summe, welche wir D nennen wollen, die Differenz sein zwischen dem Subtrahendus A und dem Subtrahenten B. Denn wenn ich zu dieser D aufs neue den Subtrahenten B mit seinen unveränderten Zeichen

 addire;

addire; so enthält die nun entstehende Summe in sich 1) den Subtrahent A, 2) den Subtrahent B mit verkehrten Zeichen und 3) den Subtrahent mit seinen eigentlichen Zeichen. Da nun die beiden leztern Theile bei 2) und 3) sich nothwendig einander ganz und gar aufheben und vernichten müssen, so gibt diese lezte Summe den Subtrahendus A; folglich ist D die richtige Differenz (§. 113.) Wenn z. B.

von $3a - 4cd + fg - m - xy$

folgende $5a - 2cd + fg + m + r$ abzuziehen ist: so verkehre man jedes Zeichen vor den Gliedern des Subtrahenten, und addire denselben mit so verkehrten Zeichen zu dem Subtrahendus; so giebt die so entstehende Summe die verlangte Differenz. Zwischen den beiden hier angegebnen Zahlen ist demnach

$$3a - 5a - 4cd + 2cd + fg - fg - m \\ - m - xy - r$$

oder, der Deutlichkeit und Bequemlichkeit wegen, so kurz als möglich geschrieben,

$$-2a - 2cd - 2m - xy - r,$$

die Differenz: denn wenn ich zu dieser Reihe den

Subtrahent $5a - 2cd + fg + m + r$,

addire, so mus ich nothwendig

wieder $3a - 4cd + fg - m - xy$,

als den Subtrahendus erhalten.

§. 115.

Demnach ist zwischen + a und + b, wenn b der Subtrahent ist, die Differenz a — b, wenn a der Subtrahent ist, die Differenz b — a.

Zwischen a und — b, wenn — b der Subtrahent ist, die Differenz a + b, wenn a der Subtrahent ist, die Differenz — a — b.

Zwischen — a — b, wenn — b der Subtrahent ist, die Differenz — a + b; wenn — a der Subtrahent ist, die Differenz + a — b.

§. 116.

Man pflegt in einigen Lehrbüchern für die ersten Anfänger diese Säze auf eine andere Art vorzutragen, und sucht z. B. zu erforschen, was 30 Rthlr. Einname (+ 30) von 20 Rthlr. Ausgabe (— 20) abgezogen wohl für eine Zahl geben müsten. Ein solches Abziehen komt nach den Begriffen, die wir von Einname und Ausgabe haben, in keiner einzigen Rechnung vor; so wie überhaupt zwischen zweien Grössen von verschiednen Zeichen, in so fern diese Zeichen eine entgegengesezte Beziehung der beiden Grössen anzeigen, keine Subtraktion nach dem in der gemeinen Rechenkunst gewöhnlichen Begriffe stat finden kan. Wil man aber auf diese Weise solche Säze, welche nur nach dem algemeinen Begriffe der algebraischen Subtraktion einen geschikten Sin haben, nach dem weit eingeschränktern Begriffe, welcher in der gemeinen Arithmetik

von

von der Subtraktion gegeben wird, erklären und deutlich machen; so ist dis ebenfals ein unmögliches und schädliches Unternehmen. Wir wollen uns dafür lieber gleich anfangs gewöhnen nach einmal festgesezten Begriffen und Erklärungen weiter fortzudenken, und wer die (§. 111.) gegebene Erklärung beständig vor Augen behält, der wird bei keinen von den daraus folgenden Säzen die geringste Schwierigkeit finden.

§. 117.

Wenn ich nemlich + 30 von — 20 abziehen sol; so heist dis nichts anders, als daß ich eine Zahl finden solle, welche angiebt, um wie viel + 30 von — 20 verschieden sei, und welche Zahl zu + 30 hinzugethan — 20 gebe. Nach (§. 114.) finde ich diesen Unterschied = — 20 — 30 = — 50; und in der That ist + 30 um — 50 von — 20 unterschieden; denn ich müste gerade noch — 50 zu + 30 hinzuthun, um — 20 zu erhalten, indem + 30 — 50 = — 20. Die Differenz — 50 zeigt also auch an, daß der Subtrahent — 20 um 50 kleiner sei als der Subtrahendus + 30, und umgekehrt der Subtrahendus + 30 um 50 größer als der Subtrahent — 20, nach den (§. 109.) gegebnen

nen Begriffen von der Größe nnd Kleinheit der algebraischen Zahlen.

§. 118.

Eben so, wenn ich von — 10 die Zahl — 6 abziehen sol, so heist das nicht anders, als daß ich eine Zahl finden sol, welche anzeigt, um wie viel die — 6 von der — 10 unterschieden sei, oder was für eine Zahl ich zur — 6 hinzuthun müsse, um — 10 zu erhalten. Ich finde nun nach der §. 114. gegebnen Regel diese Differenz $= -10 + 6 = -4$, welches anzeigt, daß ich noch — 4 zur — 6 hinzuthun, das ist — 6 noch um 4 kleiner machen müsse, um — 10 zu erhalten. Und dieses ist wiederum volkommen wahr, indem nach §. 114. — 10 um 4 kleiner ist, als — 6.

§. 119.

XXX. Aufgabe.

Ein Kaufman vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimt aber alle Jahr zur Erhaltung seiner Familie 100 Pfund Sterling davon weg, und wird nach drei Jahren noch einmal so reich, als er anfangs war. Wie viel Pfund Sterling hat er Anfangs gehabt?

§. 120.

Auflösung.

Ausdruk in Worten.	Ausdruk in algebraischen Zeichen.
1) Ein Kaufman besizt gewisse Pfund Sterling.	x
2) Davon legt er beim Anfang des ersten Jahres 100 Pfund weg.	$x - 100$
3) Den Rest vermehrt er um den dritten Theil.	$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{3x - 300}{3} + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
4) Beim Anfang des zweiten Jahres nimt er wieder 100 Pf. Sterl. davon	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
5) Den Rest vermehrt er um den dritten Theil	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$
6) Mit Anfang des dritten Jahres legt er wieder 100 Pfund zurük	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
7) Den Rest vermehrt er um den dritten Theil	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$
8) Nun ist er noch einmal so reich, als er anfangs war.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$

Diese Gleichung multiplicire man durch 27; so erhält man $64x - 14800 = 54x$,
$54x$ subtrahirt, bleibt $10x - 14800 = 0$
14800 addirt, komt $10x = 14800$
daher $x = \frac{14800}{10} = 1480$,
welches sein anfängliches Vermögen war.

§. 121.

XXXI. Aufgabe.

Einer hat Muskatennüsse gekauft, und sagt, daß 5 Stük eben so viel über 10 Pfennige kosten, als 6 Stük unter 34 Pfennige kosten. Wie viel kostete das Stük?

§. 122.

Auflösung.

Ein Stük koste x Pfennige, so kosten 5 Stük $5x$ Pf. und 6 Stük $6x$ Pf. Es sol also sein $5x - 10 = 34 - 6x$. (die Differenz zwischen $5x$ und 10 gleich der Differenz zwischen 34 und $6x$) Daher $11x = 44$, und also $x = 4$.

§. 123.

XXXII. Aufgabe.

Suche eine Zahl: wenn ich 1) diese Zahl duplire, 2) von diesem Duplo subtrahire 1, 3) den Rest duplire, 4) davon 2 subtrahire, 5) den Rest

durch

durch 4 dividire, daß eins weniger herauskomme als die angenommene Zahl.

§. 124.

Auflösung.

Die gesuchte Zahl sei x; so ist 1) das Duplum derselben 2x, davon 2) 1 subtrahirt, bleibt 2x — 1, dieser Rest 3) duplirt, giebt 4x — 2, davon 4) 2 subtrahirt, bleibt 4x — 4, diese Differenz 5) durch 4 dividirt, komt $\frac{4x - 4}{4}$, welches nun um 1 weniger sein sol, als die gesuchte Zahl. Folglich mus x dergestalt genommen werden, daß

$$\frac{4x - 4}{4} = x - 1$$

oder $x - 1 = x - 1$ sei, welches sein wird

wenn $x = x$.

Da nun eine jede Zahl dieser lezten Forderung Genüge thut, indem eine jede Zahl sich selbst gleich ist, so erfült eine jede beliebige Zahl die Forderungen dieser Aufgabe.

§. 125.

XXXIII. Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe und Differenz zweier Zahlen die Zahlen selbst zu finden.

Die Summe der beiden Zahlen sei = s.

Die Differenz derselben = d.

Die eine von den gesuchten Zahlen = x, die andere = y; so ist

§. 126.

§. 126.

Auflösung.

I) $x + y = s$

II) $x - y = d$. Addirt man die linken und rechten Seiten beider Gleichungen; so erhält man (§. 47.) $2x = s + d$, daher $x = \frac{s + d}{2}$. Um eine ähnliche Formel für y zu erhalten, darf man nur die zwote Gleichung von der ersten abziehen; so hat man (§. 48. §. 114.)

$x + y - x + y = s - d$.

oder $2y = s - d$, daher $y = \frac{s - d}{2}$.

§. 127.

Durch die Addition der beiden Gleichungen erhielten wir hier eine neue sehr einfache Gleichung, worin die eine unbekante Zahl y weggefallen, und nur noch die andere x enthalten war, so daß durch Anwendung der gewöhnlichen Auflösungsregeln der Werth von x in lauter gegebenen und bekanten Zahlen angegeben werden konte; und eben so ergab sich durch die Subtraktion der zwoten Gleichung von der ersten eine neue Gleichung, worin x weggefallen und nur noch y vorhanden war. Man wird aber, wie leicht einzusehen ist, auf diese Art nicht bei allen Gleichungen zu seinem Zwekke gelangen, und die in der 24 Aufgabe angewandte Methode ist weit algemeiner, ja für solche Gleichungen, als wir bis jezt kennen, ganz algemein, um aus zweien

Gleichungen, worinnen zwei unbekante Größen vorkommen, die Werthe dieser unbekanten Größen durch lauter bekante Größen zu bestimmen.

§. 128.

Wolte man die beiden Gleichungen

I) $x + y = s$ und II) $x - y = d$

nach dieser Methode auflösen; so würde man den Werth von x aus der ersten Gleichung finden, $x = s - y$, den Werth von x aus der zweiten Gleichung $x = d + y$, und aus diesen beiden Gleichungen eine neue folgern, worin kein x mehr ist, nemlich $d + y = s - y$,

also auch $d + 2y = s$

auch $2y = s - d$, und daher $y = \frac{s - d}{2}$

Schreibt man nun ferner in die erste Gleichung $x + y = s$, stat y den Werth desselben $\frac{s - d}{2}$; so erhält man die Gleichung

$$x + \frac{s - d}{2} = s, \text{ worin kein } y \text{ ist,}$$

oder (§. 39.) $x + \frac{s}{2} - \frac{d}{2} = s$

folglich $x = s - \frac{s}{2} + \frac{d}{2} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2} = \frac{s + d}{2}.$

§. 129.

Wenn nun $s = 14$, $d = 6$ gegeben wird; so ist die eine Zahl $x = \frac{14 + 6}{2} = 10$, die andere $y = \frac{14 - 6}{2} = 4$. Wenn sein sol $s = -6$, $d = 4$; so wird $x = \frac{-6 + 4}{2} = -1$ und $y = \frac{-6 - 4}{2} = -5$; und es ist auch die Summe von -1 und -5, $= -6$, die Differenz von -1 und $-5 = -1 + 5 = 4$.

Wenn ich zwei Zahlen suchen sol, deren Summe ist 6, deren Differenz 9; so finde ich die eine Zahl $x = \frac{6 + 9}{2} = 7\frac{1}{2}$, die andere Zahl $y = \frac{6 - 9}{2} = -\frac{3}{2}$; und es ist in der That die Summe von $7\frac{1}{2}$ und $-1\frac{1}{2}$ gleich 6, die Differenz zwischen $7\frac{1}{2}$ und $-1\frac{1}{2}$ gleich $7\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 9$.

§. 130.

Wenn beide Zahlen, x und y, positiv sind, und der Subtrahent y kleiner ist, als der Subtrahendus x; so wird sowohl die Summe s als auch die Differenz d positiv, so daß x, welches $= \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$ allemal größer sein mus, als y, welches $= \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$.

Daher gilt für diesen Fal die nüzliche Regel, daß man bei gegebner Summe und Differenz zweier unbekanten Zahlen die größre Zahl findet, wenn man die halbe Summe zur halben Differenz addirt, die kleinere aber, wenn man die halbe Differenz von der halben Summe subtrahirt.

§. 131.

Wenn $-6+3=7-4$, so mus auch $+6-3=-7+4$, und überhaupt wenn

1) $a-x=p-nr+9$ sein sol, auch nachdem man das Zeichen eines jeden Gliedes verkehrt hat

2) $-a+x=-p+nr-9$ sein; denn wenn $a-x=p-nr+9$, so mus auch nach §. 62. $-p+nr-9=-a+x$ sein, und diese leztere Gleichung ist offenbar mit der bei 2) völlig einerlei.

§. 132.

XXXIV. Aufgabe.

Suche eine Zahl, deren Drittel, Viertel und Fünftel zusammenaddirt eine Zahl gibt, welche um 13 größer ist, als die gesuchte Zahl selbst.

§. 133. Auflösung.

Wenn x die verlangte Zahl ist; so ist

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x + 13,$$

oder $\frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} + \frac{x}{5} = x + 13,$

das ist $\frac{7x}{12} + \frac{x}{5} = x + 13$. Daher auch durch 12 multiplicirt, $7x + \frac{12x}{5} = 12x + 12 . 13$, und durch 5 multiplicirt auch $35x + 12x = 60x + 5 . 12 . 13$;

also auch $47x - 60x = 60 . 13$,

das ist $-13x = 60 . 13$.

Daher auch (§. 131.) $13x = -60 . 13$

also $x = -60$.

Es ist nun $-\frac{60}{3}$ und $-\frac{60}{4}$ und $-\frac{60}{5}$ zusammengenommen $= -20 - 15 - 12 = -47$, und -47 ist allerdings um 13 größer als -60. (§. 109.)

§. 134.

Durch eine geschikte Multiplikation der Gleichung ist man allemal im Stande, alle Divisoren aus einer jeden Gleichung fortzuschaffen. In dieser Absicht darf man nur z. B. in folgender Gleichung

$$\frac{fg}{pq} - \frac{x}{n} = \frac{b}{x}$$

entweder nach und nach durch die Divisoren pq, n, x, oder auch mit einemmale durch das Produkt derselben pqnx, beide Seiten multipliciren, so erhält man $\frac{pqnfgx}{pq} - \frac{pqnxx}{n} = \frac{pqnbx}{x}$

oder $nfgx - pqxx = pqnb$.

§. 135. XXXV. Aufgabe.

Wenn ich zwei Brüche von gleichen Zählern, $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{5}$, nach den Regeln der gemeinen Rechenkunst, unter einerlei Benennung bringe und addire; so erhalte ich den neuen Bruch $\frac{16}{15}$, als die Summe der beiden Brüche. Nun sehe ich, daß dieser Bruch $\frac{16}{15}$ sogleich herauskomt, wenn ich die Summe der beiden Nenner $(5 + 3)$ durch den gemeinschaftlichen Zähler 2 multiplicire, und unter dieses Produkt das Produkt der beiden Nenner als Divisor schreibe: wird mir ein solches Verfahren allemal die Summe zweier Brüche von gleichen Zählern geben?

§. 136. Auflösung.

Man drükke zwei Brüche von gleichen Zählern algemein aus durch $\frac{a}{p}$ und $\frac{a}{q}$, und bringe nach den Regeln der gemeinen Rechenkunst beide unter einerlei Nenner, indem man Zähler und Nenner eines jeden Bruches durch den Nenner des andern multiplicirt, so erhält man $\frac{ap}{pq}$ und $\frac{aq}{pq}$; beide addirt, giebt $\frac{ap}{pq} + \frac{aq}{pq} = \frac{ap + aq}{pq} = \frac{a(p+q)}{pq}$, (§. 21.) und aus dieser Gleichung erhellet, daß das angegebene Verfahren allemal die richtige Summe solcher Brüche geben wird. Eben so kan nach folgenden Gleichungen $\frac{a}{p} - \frac{a}{q} = \frac{aq}{pq} - \frac{ap}{pq} = \frac{a(q-p)}{pq}$ die Differenz $\frac{a}{p} - \frac{a}{q}$ auf eine ähnliche Weise mit Vortheil berechnet werden.

Viertes Kapitel.

Von den Decimalbrüchen.

§. 137.

Nach dem bekanten Geseze unserer algemein eingeführten Decimalzahlen bedeutet z. B. in 333 die äußerste 3 an der linken Seite 10 mal mehr, als die um eine Decimalstelle weiter nach der Rechten zu stehende 3, und diese mitlere 3 wieder 10 mal mehr als die zunächst zur Rechten geschriebene 3, so daß diese Zahl gelesen wird dreihundert, dreißig und drei. Wenn man nun annimt, daß das Komma in 333,3333 ein für allemal die Stelle der Einer anzeigen, übrigens aber nach dem vorigen Geseze jede Ziffer, welche um eine Stelle weiter zur Rechten hin steht, 10 mal weniger als die nach der linken ihr zunächst stehende bedeuten solle; so wird die Zahl 333, 3333 zu lesen sein: dreihundert, dreißig und drei, 3 Zehntel, 3 Hundertel, 3 Tausendtel und 3 Zehntausendtel. Und folgende Zahl, 24, 523, wird so viel sein als $20 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$.

§. 138.

Bei einer Zahl, welche ganz ohne ein solches Einheitskomma geschrieben ist, wird allemal angenommen, daß die äußerste Zahl der rechten Seite

an der Stelle der Einer stehe, so daß 856 so viel ist, als 856, und 120 so viel ist, als 120,

§. 139.

240 ist zehnmal mehr als 24, weil durch die zu 24 geschriebne 0 in 240, die 4 von der Stelle der Einer in die Stelle der Zehner, und die 2 von ihrer Stelle der Zehner in die Stelle der Hunderte verrükt wird. Es ist aber 24,0 oder auch 24,000 nichts mehr, als 24, weil so wenig durch angeschriebne Nullen, als durch andere hinzugeschriebne Zahlen, die durch das (,) nunmehro bestimte Stelle der Einer weiter verrükt werden kan.

§. 140.

Da nun $524,3 = 500 + 20 + 4 + \frac{3}{10}$,
aber $52,43 = 50 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$ ist; so sieht man deutlich ein, daß ein jedes Theil der Zahl 524,3 also auch die ganze Zahl selbst um 10 mal kleiner dadurch wird, daß man das Einheitskomma um eine Decimalstelle weiter nach der linken zu rükt. Und da auf eben die Art

$806,2 = 800 + 0 + 6 + \frac{2}{10}$

aber $80,62 = 80 + 0 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100}$

und $8,062 = 8 + 0 + \frac{6}{100} + \frac{2}{1000}$

und $0,8062 = \frac{8}{10} + 0 + \frac{6}{1000} + \frac{2}{10000}$ ist;

so leuchtet überhaupt gar leicht ein, daß eine jede Zahl um zehnmal, hundertmal oder 1000 mal rc. kleiner wird, indem man das Einheitskomma um ein

ein, zwei oder drei 2c. Decimalstellen weiter nach der Linken zu hinaufrükt.

§. 141.

Umgekehrt mus also auch eine jede Decimalzahl um 10, 100, 1000 mal 2c. größer werden, wenn man das Einheitskomma um eine, zwei, drei 2c. Decimalstellen nach der Rechten zu fortrükt. Es mus z. B. 3460, tausendmal größer sein, als 3,460 welches auch durch sich selbst schon klar ist, indem $3,460 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + 0$,

aber $3460, = 3000 + 400 + 60 + 0$ ist.

§. 142.

Nach dieser Einrichtung können nicht nur mehrere Decimalbrüche von verschiednen Nennern auf eine ungemein bequeme Weise geschrieben werden, indem man z. B. stat $30 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$ schreibt 30,465 stat $\frac{5}{100} + \frac{6}{10000}$ schreibt 0,0506; sondern es können auch alle Regeln für die Addition, Subtraktion und Division in ganzen Decimalzahlen auf diese Decimalbrüche angewandt werden.

§. 143.

So wird z. B. von	8,04374
und	23,9825
die Summe sein	32,02724
	(1)(1)(1)

 denn

denn da $\frac{7}{10000} + \frac{5}{10000} = \frac{12}{10000} = \frac{10}{10000} + \frac{2}{10000} = \frac{1}{1000} + \frac{2}{10000}$ ist; so mus von der Zahl 12 welche aus der Addition der beiden übereinanderstehenden Zahlen 7 und 5 entsteht, die Zahl 1 mit zur nächst höhern Decimalstelle hinzugerechnet werden ꝛc. Eben so wird auch

von 800, 98
6, 0407
0, 09

die Summe sein 807, 1107

(2)

§. 144.

Auf eben die Art wird auch

von 9,8.0.2.0.1
subtrahirt 0,06345

der Rest 9,73856 bleiben, und zu diesem der Subtrahent 0,96345 wiederum addirt, den Subtrahendus 9,80201 richtig geben.

§. 145.

Der Faktor 4793 multiplicirt in
den Faktor 284

19172
38344
9586 giebt das

Produkt 1361212.

Wenn

Wenn nun stat des ersten Faktors ein 10 mal kleinerer Faktor, also 479, 3 gesezt würde; so müste auch das Produkt nothwendig 10 mal kleiner werden, folglich

	479,3	multiplicirt
durch	284	geben das
Produkt	136121,2	

Wenn stat des ersten Faktors ein 100 mal kleinerer also 47, 93 oder ein 1000 mal kleinerer 4, 793 gesezt würde; so müste auch das Produkt 100 mal oder 1000 mal kleiner werden, folglich

	47, 93	und	4, 793
	2 84		284
geben	13612, 12	geben	1361, 212

Eben dasselbe gilt auch von dem andern Faktor. Sobald nämlich auch stat dieses Faktors 284 ein zehnmal kleinerer als 28, 4 oder ein 100 mal kleinerer als 2, 84 u. s. w. gesezt wird; so mus auch dadurch aufs neue das Produkt 10 mal oder 100 mal u. s. w. verkleinert werden. Demnach wird das Produkt

von	47, 93	von	4,793
mal	2 8,4	mal	2,84
nicht mehr	13612, 12	nicht mehr	1361,212
sondern nur	1361, 212	sondern nur	13,61212 sein.

§. 146.

Aus diesem allen ergiebt sich für die Multiplikation in Decimalbrüchen folgende algemeine Regel.

Man

Man multiplicire zwei Decimalbrüche volkommen so als ganze Zahlen in einander und schneide in dem so erhaltenen Produkte so viele Decimalstellen ab, als in beiden Faktoren zusammen genommen abgeschnitten sind: so hat man das Produkt dieser beiden Zahlen.

Eben so leichte werden die Regeln für die Division in Decimalbrüchen entwikkelt. Denn da z. B. nach den bekanten Divisionsregeln gefunden wird $\frac{14592}{456} = 32$ und ein 10, 100 mal 1000 mal ꝛc. kleinerer Dividendus ganz nothwendig auch einen 10 mal, 100 mal, 1000 mal ꝛc. kleinern Quotienten geben mus; so wird sein $\frac{1459,2}{456} = 3,2$ und $\frac{145,92}{456} = 0,32$ und $\frac{14,592}{456} = 0,032$. Und da im Gegentheil ein 10, 100, 1000 mal ꝛc. verkleinerter Divisor einen 10, 100, 1000 mal ꝛc. vergrößerten Quotienten geben mus; so wird $\frac{14592}{45,6} = 320$, $\frac{14592}{4,56} = 3200$, $\frac{14,592}{45,6} = 0,32$ sein, und es erhellet hieraus, daß man überhaupt den Quotienten zweier Decimalbrüche findet, indem man gerade wie bei ganzen Zahlen dividirt, ohne auf das Komma zu sehen, darauf aber den so gefundenen Quotienten so viele zehnmal kleiner macht, als Decimalstellen im Dividendus abgeschnitten sind,

und

und wieder so viele 10 mal größer macht, als Decimalstellen im Divisor abgeschnitten sind.

§. 148.

XXXVI. Aufgabe.

Einen jeden Bruch in Decimalbrüche zu verwandeln.

§. 149.

Auflösung.

Es sei z. B. der Werth des Bruchs $\frac{4}{5}$ in Decimalbrüchen anzugeben; so sage ich, es ist $\frac{3}{8} = \frac{3,000}{8}$ (§. 139.) durch wirklich vorgenommene Division finde ich nun (§. 147.) $\frac{3,000}{8} = 0,35$ also mus $\frac{3}{8} = 0,35$ sein. Eben so finde ich $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$; und $\frac{4}{5} = \frac{4,0}{5} = 0,8$ und überhaupt kan auf diese Weise der Werth eines Bruches genau in Decimalbrüchen ausgedrükt werden, wenn nur der Nenner desselben in seinem durch 10, oder 100, oder 1000, u. s. w. vermehrtem Zähler genau aufgehet. Ein solcher Bruch aber, bei welchem dieses nicht stat findet, kan niemals ganz genau in Decimalbrüchen angegeben werden. So kan ich z. B. zwar sezen $\frac{2}{7} = \frac{2,00}{7}$ und durch wirklich vorgenommene Division finden $\frac{2,00}{7} = 0,28$ ꝛc. es wird aber bei dieser Division noch ein Rest von 0,04, das ist, $\frac{4}{100}$ bleiben, dessen siebenter Theil den noch feh-

lenden

lenden Theil des Quotienten ausmacht. Indessen sieht man hieraus, daß der Fehler kein ganzes Hundertel, sondern nur noch einige Tausendtel, Zehntausendtel, 2c. betragen kan. Indem ich nun entweder in diesen Rest 0,04 weiter fort dividire durch 7, oder auch gleich anfangs seze $\frac{2}{7} = \frac{2,0000}{3}$, so finde ich $\frac{2}{7} = 0,2857$ 2c. so daß der Fehler, welcher hiebei immer noch begangen wird, nunmehr kein ganzes Zehntausendtel mehr betragen, sondern nur noch in den fehlenden Decimalbrüchen der folgenden immer niedrigern Klassen liegen kan. Auf diese Weise kan man durch fortgesezte Division den Fehler so klein machen und die Genauigkeit so weit treiben, als man nur immer wil. Ueberdem entdekt sich mehrentheils gar bald ein gewisses Gesez, nach welchem einige von den noch fehlenden Decimalstellen ohne mühsame Division sogleich hinzugeschrieben werden können. So findet sich z. B. $\frac{2}{3} = \frac{2,00}{3} = 0,66$, $\frac{2,00000}{3} = 0,66666$ 2c. ferner $\frac{6}{7} = \frac{6,00}{7} = 0,85$ 2c. und da von nun an immer derselbe Rest bleiben mus, so wird $\frac{6,000000}{7} = 0,857142$ 2c. $\frac{6,0000000000}{7} = 0,8571428571$ 2c. gefunden werden.

Indes die Anfänger diese 4 ersten Kapitel durchgegangen sind, hat man sie zugleich auch in den ersten Lehrsäzen und Aufgaben der Elementargeometrie unterrichtet, welche nach dem in der Vor-

rede

rede angeführten Zwekke in dem zweiten Anhange nur ganz kurz unter Nummer 1 bis 36 angeführt sind. Nach diesen Nummern werden nämlich einige in der Folge nöthigen Säze der Geometrie citirt werden, wobei wir voraussezzen, daß sich diejenigen, welche auch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie aus diesem Buche erlernen wollen, auch mit den Gründen und nächsten Folgerungen dieser Säze nach irgend einem geometrischen Lehrbuche hinlänglich bekant gemacht haben.

Fünftes Kapitel.

Anwendung der algebraischen Rechnungsart auf leichte geometrische Aufgaben.

---

§. 150.

XXXVII. Aufgabe.

Es ist ein Parallelogram (Fig. 5.) gegeben, dessen Grundlinie 8″ und dessen Höhe 6″ ist. Man sol ein anderes Parallelogram (Fig. 6.) machen, welches dem Flächenraum nach diesem gegebnen gleich sein, aber eine Grundlinie von 10″ haben sol: wie hoch mus dis Parallelogram gemacht werden?

§. 151.

Auflösung.

Die gesuchte Höhe sei x''; so wird der Inhalt eines Parallelograms dessen Basis 10'' und dessen Höhe x'' ist, durch 10 x□'' angegeben (30) und es mus demnach x dergestalt genommen werden, daß 10 x = 6,8 wird, also $x = \frac{6.8}{10} = \frac{48}{10}$ = (§. 140.) 4,8'' = 4'' 8''' sein.

§. 152.

XXXVIII. Aufgabe.

Wie groß mus die Grundlinie eines Parallelogrammes genommen werden, zu dessen Höhe eine Linie H'' gegeben ist, wenn es 4 mal so groß werden sol, als ein anderes gegebnes Parallelogram, dessen Basis = b und Höhe = h ist.

§. 153.

Auflösung.

Man zeichne sich außer dem gegebnen auch ein anderes Parallelogram, welches das gesuchte Parallelogram bis zur weitern Berichtigung vorstellen kan, und nenne die noch unbekante Grundlinie desselben x''; so wird H x□'' den Inhalt des gesuchten, so wie h b□'' den Inhalt des gegebenen Parallelogrammes angeben. Damit also den Forderungen der Aufgabe Genüge geschehe, mus x der-

dergestalt angenommen werden, daß $H x \square'' = 4 h b \square''$, also (siehe Anmerk. § 78.) überhaupt $Hx = 4hb$ wird, folglich $x = \frac{4hb}{H}$ sein.

Wenn also gegeben wäre $h = 6''$, $b = 5''$, $H = 4'''$, so müste gemacht werden $x = \frac{4.6''.5''}{4'''}$ $= \frac{4.60'''.50'''}{4'''} = 3000''' = 3_{0}$.

§. 154.
XXXIX. Aufgabe.

Es sol ein Parallelogram von einer bestimten Basis β gemacht werden, dessen Flächenraum 3 mal so groß ist, als ein gegebner Triangel, dessen Basis $= b$ und dessen Höhe $= h$. Wie hoch mus das Parallelogram gemacht werden?

§. 155.
Auflösung.

Die gesuchte Höhe des Parallelograms sei $= x$; so ist der Inhalt eines Parallelogrammes, dessen Höhe x und Basis β ist $= \beta x$, und der Inhalt des gegebnen Triangels ist $= \frac{bh}{2}$; folglich mus nach den Forderungen der Aufgabe x dergestalt angenommen werden, daß $\beta x = \frac{3bh}{2}$ wird, wel-

Bayerische Staatsbibliothek München

ches geschiehet, wenn $x = \frac{3bh}{2\beta}$ genommen wird.

Nach dieser Formel läst sich nun das erforderliche Maß der gesuchten Grundlinie in Zahlen finden, indem man die gegebnen Linien b, h, β misset und ihre Größe durch Zahlen ausdrükt, welche sich auf einerlei Einheit beziehen, das ist, es mus das Maß aller Linien entweder in Schuhen oder Zollen oder Linien 2c. angegeben werden.

§. 156.

XL. Aufgabe.

Es sol auf dem Felde ein Quadrat von 144□° abgestochen werden; wie groß mus die eine Seite genommen werden?

Antwort: 12°; denn ein Quadrat, dessen eine Seite = 12° ist, enthält 12.12, das ist 144□°.

§. 157.

XLI. Aufgabe.

Ein solches Quadrat auf dem Felde sol 409600□° enthalten; wie groß mus die eine Seite des Quadrats genommen werden?

§. 158.

Auflösung.

Es komt nur darauf an, daß man eine Zahl findet, welche mit sich selbst multiplicirt 409600 gibt.

Diese

Diese Zahl heißt alsdan die Quadratwurzel von 409600, so wie 5 die Quadratwurzel von $25 = 5.5$, 6 die Quadratwurzel von $36 = 6.6$, 7 die Quadratwurzel von 49, und umgekehrt 25 die Quadratzahl von 5, 49 die Quadratzahl von 7 genant wird.

Man bemühe sich für jezt nur, diese Zahl durch Versuche zu finden, wobei man sogleich übersehen kan, daß die Wurzel von 4096 zwischen 10 und 100 fallen mus; denn das Quadrat von 10, nämlich $10.10 = 100$ würde kleiner, das Quadrat von 100 aber, nämlich 10000, größer als 4096 sein. Das Quadrat von 50 ist $50.50 = 2500$, welches also noch zu klein ist; 60 quadrit gibt $60.60 = 3600$. Das Quadrat von 64 aber gibt $64.64 = 4096$; also ist 64 die Quadratwurzel von 4096, und es mus 640 die verlangte Quadratwurzel von 409600 sein.

§. 159.

Der Ausdruk $\sqrt{4}$ zeigt die Quadratwurzel von 4 an. Es ist also $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{(12+4)} = \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{16.4} = \sqrt{8.8} = 8$. Bei dem Gebrauche dieses Wurzelzeichens ($\sqrt{\ }$) wird sich überhaupt wenig Schwierigkeit finden, wenn wir nur immer auf den Begrif zurük sehen, daß $\sqrt{a}$ eine Zahl bedeutet, welche mit sich selbst multiplicirt a gibt; oder daß $\sqrt{25}.\sqrt{25} = 25$; daß eben so $\sqrt{81}.\sqrt{81} = 81$, und überhaupt $\sqrt{a}.\sqrt{a} = a$, $\sqrt{(a+b)}.\sqrt{(a+b)} = a+b$ ist.

 §. 160.

§. 160.

Die Quadratzahl von x ist xx. Stat xx schreibt man x^2, und spricht den Ausdruk x^2 aus durch x quadrirt, oder x in der zweiten Potenz. Eben so ist $a^2 = a.a$, $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$, folglich ist $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$ und dergleichen.

§. 161.

Grundsaz.

Wenn zwei Zahlen einander gleich sind, so müssen auch ihre Quadratzahlen einander gleich sein. Z. B. wenn $a = n + r$, so mus auch $aa = (n+r).(n+r)$ sein. Und umgekehrt müssen auch

§. 162.

Die Quadratwurzeln zweier gleichen Zahlen einander gleich sein; z. B.

Wenn $x^2 = b$, so mus auch

$\sqrt{x^2} = \sqrt{b}$ sein. Denn es ist nach (§. 159.) $\sqrt{x^2}.\sqrt{x^2} = x^2$, und ferner auch $\sqrt{b}.\sqrt{b} = b$. Da nun $x^2 = b$ sein sol; so mus auch $\sqrt{x^2}.\sqrt{x^2} = \sqrt{b}.\sqrt{b}$ sein, welches unmöglich stat finden könte, wenn $\sqrt{b}$ um das geringste größer oder kleiner als $\sqrt{x^2}$ wäre.

§. 163.

XLII. Aufgabe.

Ein Quadrat zu machen, welches so groß ist, als ein gegebner Triangel von der Basis b und

Höhe

Höhe h, und ein gegebenes Parallelogram von der Basis β und Höhe α zusammengenommen.

§. 164.

Auflösung.

Man zeichne sich einen Triangel, dessen Basis man b und dessen Höhe h nennet; ferner ein Parallelogram, dessen Basis $= \beta$ und dessen Höhe $= \alpha$ ist, und ein Quadrat, welches das gesuchte Quadrat vorstellen sol. Nent man nun die Seite des gesuchten Quadrats x, so sieht man leicht, daß nach den Forderungen der Aufgabe sein sol

$$x^2 = \alpha\beta + \frac{bh}{2}, \text{ folglich}$$

auch (§. 163.) $\sqrt{x^2} = \sqrt{(\alpha\beta + \frac{bh}{2})}$

das ist $x = \sqrt{(\alpha\beta + \frac{bh}{2})}$

Es sei $b = 4$, $h = 3$, $\alpha = 5$, $\beta = 6$, so ist $x = \sqrt{5.6 + \frac{4.3}{2}} = \sqrt{36} = 6$.

§. 165.

XLIII. Aufgabe.

Die Seite eines Quadrats zu finden, dessen Flächenraum viermal kleiner ist, als der Flächenraum eines gegebnen Quadrats.

§. 166.

Auflösung.

Außer dem gegebnen Quadrate zeichne man sich noch ein anderes ohngefähr viermal kleineres

 Quadrat,

Quadrat, welches bis zur weitern Berichtigung das gesuchte Quadrat vorstellen kan. Nent man nun die Seite des gegebnen Quadrats a, so gibt die Zahl a^2 den Flächenraum desselben, und eben so, wenn die gesuchte Seite des verlangten Quadrates x genant wird, die Zahl x^2 den Flächenraum des gesuchten Quadrates an. Folglich sol nach der Forderung der Aufgabe sein

$$4x^2 = a^2, \text{ also}$$

mus auch sein $x^2 = \frac{a^2}{4}$

folglich (§. 162.) $x = \sqrt{\frac{a^2}{4}}$.

Es komt also nur darauf an, daß wir die Zahl angeben, welche mit sich selbst multiplicirt $\frac{a^2}{4}$ gibt; und dis ist ohne Zweifel $\frac{a}{2}$: denn es ist nach den Regeln für die Multiplikation in Brüchen (V) $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$.

§. 167.

Da allemal die Quadratzahl einer jeden Zahl entsteht, indem die Zahl durch sich selbst multiplicirt wird; so mus $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2}$ und überhaupt $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m} = \frac{n^2}{m^2}$ sein, folglich mus die Quadratzahl eines ächten

Bruches,

Bruches, in welchem der Nenner grösser ist, als der Zähler, allerdings kleiner, als die Quadratwurzel selbst sein, weil allemal das Produkt zweier ächten Brüche kleiner, als einer von den Faktoren ist. Es hat aber auch dieser Saz bei der Anwendung auf geometrische Flächenräume nicht die geringste Schwierigkeit. Man seze, daß Fig. 7. des Quadrats ABCD Seite AB = 1 Zol, folglich der Flächenraum des ganzen Quadrats = 1□″ sei, und nehme nun FB = $\frac{2}{3}$″, so wird das Quadrat FGHB allerdings = $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ = $\frac{4}{9}$□″ enthalten.

Sechstes Kapitel.

Lehrsäze der geometrischen Proportionen.

§. 168.

XLIV. Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, welche mit einer gegebnen Zahl a multiplicirt ein Produkt giebt, welches einer andern gegebnen Zahl b gleich ist.

§. 169.

Auflösung.

Die gesuchte Zahl sei x; so ist $a x = b$, daher $x = \frac{b}{a}$

Für $a = 8$, $b = 32$ ist $x = \frac{32}{8} = 4$ und $4 . 8$ giebt 32.

Für $a = 36$, $b = 12$ ist $x = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3} . 36$ giebt 12.

Für $a = 20$, $b = 8$ ist $x = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ und $\frac{2}{5} . 20$ giebt 8.

§. 170.

Wäre von den beiden gegebnen Zahlen, die eine z. B. a ein Bruch, so, daß $a = \frac{p}{q}$, so erhielte die Formel $x = \frac{b}{a}$ folgende Gestalt $x = \frac{b}{\frac{p}{q}}$; multiplicirt man nun den Zähler b, und den Nenner $\frac{p}{q}$ durch q, wodurch der Werth des Bruchs nicht verändert wird; so erhält man $x = \frac{b\,q}{\frac{p\,q}{q}} = \frac{b\,q.}{p}$

§. 171.

Wäre auch a ein Bruch und $a = \frac{r}{s}$; so würde sein $x = \frac{\frac{r}{s}}{\frac{p}{q}}$, oder, Zähler und Nenner multiplicirt durch q, $x = \frac{\frac{r\,q}{s}}{\frac{p\,q}{q}} = \frac{\frac{r\,q}{s}}{p}$, ferner noch Zähler und Nenner multiplicirt durch s, $x = \frac{\frac{r\,q\,s}{s}}{p\,s} = \frac{r\,q}{p\,s}$.

§. 172.

Als ein Zeichen der vorzunehmenden Division pflegt man auch zwei Punkte (:) zu gebrauchen, dergestalt, daß a : b einerlei sagt mit $\frac{a}{b}$, welches besonders alsdenn, wenn der Dividendus oder Divisor, oder beide schon die Gestalt eines Bruches haben, bequemer als der gewöhnliche Divisionsstrich gebraucht wird. Man schreibt daher

stat $\frac{\frac{r}{s}}{\frac{p}{q}}$ lieber $\frac{r}{s} : \frac{p}{q}$, und aus dem vorigen §. erhellet, daß $\frac{\frac{r}{s}}{\frac{p}{q}} = \frac{rq}{sp}$ sei, welches auch schon bei der Division in Brüchen gelehrt wird (siehe vorläufiger Unterricht VI.)

§. 173.

Man sieht aus der Auflösung der vorigen Aufgabe, daß man zu jeden 2 gegebnen Zahlen allerdings eine dritte finden kan, welche mit der einen multiplicirt die andere Zahl giebt, obgleich der Werth dieser Zahl sehr oft nicht anders als in einem Bruche angegeben werden kan.

§. 174.

Erklärung.

Wenn von vier Linien, (Fig. 8.) die erste eben so in der zweiten enthalten ist, als die dritte in der vierten; so sind diese vier Linien in der Ordnung proportional.

§. 175.

Um zu untersuchen, ob die vier Linien AB, CD, EF, GH proportional sind, so versuche man die

die erste Linie AB in solche gleiche Theile zu theilen, daß eine gewisse Anzahl dieser Theile zusammengenommen genau die zweite Linie CD herausbringe. Hat man dieses erreicht; so theile man die dritte Linie EF in eben so viel gleiche Theile, als die AB getheilt worden; und wenn alsdan eben so viel solcher gleichnahmigen Theile von EF auf die GH gehen, als von AB auf die CD gingen: so sind die vier Linien AB, CD, EF, GH in dieser Ordnung proportional.

So sieht man z. B. daß die vier Linien AB, CD, EF, GH (Fig. 8.) proportional sind, denn 5 Drittel von AB machen gerade CD, und 5 Drittel von EF gerade GH aus, und es ist $\frac{5.AB}{3} = CD$, und $\frac{5.EF}{3} = GH$.

§. 176.

Es kan sehr oft treffen, daß die zweite Linie weder aus den Dritteln noch aus den Vierteln, Fünfteln, Sechsteln ꝛc. der ersten Linie genau zusammengesezt werden kan. Wenn man aber diese Linie nur immer weiter und weiter in mehrere und also auch kleinere Theile zertheilt; so wird man doch gar bald solche Theile erhalten, aus welchen sich die zweite Linie ohne allen für unser Auge merkbaren Fehler zusammensezen läst.

§. 177.

Eben so sind auch 4 Zahlen proportional, wenn die erste Zahl so oft in der zweiten enthalten ist, als die dritte in der 4ten. Z. B. die vier Zahlen 2, 6, 4, 12, sind in dieser Ordnung proportional: denn 2 ist in 6 enthalten dreimal, so wie auch 4 in 12 dreimal enthalten ist. Man schreibt dergleichen Proportionalzahlen auf folgende Weise

$$2 : 6 = 4 : 12$$

und pflegt einen solchen Ausdruk zu lesen: 2 (verhält sich) zu 6; wie (sich verhält) 4 zu 12, oder auch: das **Verhältnis** der 2 zur 6 ist gleich dem **Verhältnis** der 4 zur 12.

§. 178.

Es wäre demnach $2:8 = 3:12$; denn 2 viermal genommen giebt 8, und 3 viermal genommen giebt 12.

Auch ist $8 : 2 = 12 : 3$, denn 8 ein Viertelmal genommen giebt 2, und 12 ein Viertelmal genommen ist gleich 3.

So ist auch $4 : 6 = 8 : 12$; denn es ist $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ (4 dreizweitelmal genommen giebt 6), und $8 \cdot \frac{3}{2} = 12$.

§. 179.

Hieraus sieht man, daß überhaupt vier Zahlen a, b, c, d in einer Proportion stehen, oder daß $a : b = c : d$, wenn, nachdem $\frac{m}{n}$ derge-

stalt

stalt genommen worden, daß $\frac{ma}{n} = b$, (welches allemal geschehen kan §. 114.) auch $\frac{mc}{n} = d$ ist. Z. B. in $4 : 10 = 8 : 20$ kan genommen werden $\frac{m}{n} = \frac{5}{2}$, so ist $\frac{5.4}{2} = 10$ und $\frac{5.8}{2} = 20$.

§. 180.
Erster Lehrsatz.

Wenn $a:b = c:d$, so ist $ad = bc$, das ist, wenn 4 Zahlen proportional sind; so ist das Produkt der beiden äußern Glieder gleich dem Produkte der beiden innern Glieder.

§. 181.
Beweis.

Man schreibe $ad \overset{?}{=} bc$, das ist, man frägt, ob wohl $ad = bc$? und daß man diese Frage allerdings bejahen müsse, erhellet aus folgenden Schlüssen: Wenn $a:b = c:d$, so wird, nachdem man $\frac{m}{n}$ dergestalt genommen hat, daß $\frac{ma}{n} = b$ auch sein $\frac{mc}{n} = d$ (§. 179.) Schreibt man nun in der Fragegleichung $ad \overset{?}{=} bc$, $\frac{ma}{n}$ stat b und $\frac{mc}{n}$ stat d; so erhält man $\frac{amc}{n} \overset{?}{=} \frac{cma}{n}$. Es ist aber

klar

klar, daß $\frac{amc}{n} = \frac{cma}{n}$, also auch, indem wieder d stat $\frac{mc}{n}$ und b stat $\frac{ma}{n}$ geschrieben werden kan, daß $ad = bc$.

§. 182.

Zweiter Lehrsaz.

In $a : b = c : d$, ist $d = \frac{bc}{a}$, d. i. die vierte Proportionalzahl ist gleich dem Produkte der beiden innern Glieder durchs erste dividirt.

§. 183.

Beweis.

Es ist (erster Lehrsaz) $ad = bc$, folglich auch (§. 55.) $\frac{ad}{a} = \frac{bc}{a}$ das ist $d = \frac{bc}{a}$.

§. 184.

Folgerung.

Hieraus erhellet, daß man zu jeden drei gegebnen Zahlen eine vierte Proportionalzahl finden kan, indem man, wie auch die 3 Zahlen immer gegeben sein mögen, doch allemal die beiden leztern in einander multipliciren und dies Produkt durch die erste Zahl dividiren, oder diese Division doch wenigstens durch die gewöhnliche Bezeichnung

anzei-

anzeigen kan, in welchem Falle der Werth des Quotienten durch einen Bruch angegeben wird.

§. 185.

Dritter Lehrsaz.

Wenn von vier Zahlen das Produkt der beiden äussern Zahlen gleich ist dem Produkte der beiden innern; so sind diese vier Zahlen in der Ordnung, worin sie geschrieben sind, proportional. Z. B.

Wenn von p, q, r, s

ist $ps = qr$

so ist $p : q = r : s$

§. 186.

Beweis.

Zu den drei Zahlen, p, q, r, läst sich eine vierte richtige Proportionalzahl finden, welche ist $= \frac{qr}{p}$ (§. 184.) und es ist folgende Proportion richtig, $p : q = r : \frac{qr}{p}$. Es wird nun gefragt, ob auch $p : q \overset{?}{=} r : s$ richtig sei? Ganz gewis: denn wenn, wie als wahr angenommen und vorausgesezt ist, $ps = qr$, so ist auch $s = \frac{qr}{p}$, folglich die leztere Proportion nach allen einzelnen Gliedern mit der erstern gewis richtigen völlig einerlei.

§. 187.

§. 187.

Vierter Lehrsaz.

Wenn 1) a : b = c : d; so ist
auch 2) a : c = b : d
auch 3) b : a = d : c
auch 4) b : d = a : c
auch 5) c : d = a : b
auch 6) c : a = d : b
auch 7) d : c = b : a
auch 8) d : b = c : a

§. 188.

Beweis.

Aus der ersten als richtig angenommenen Proportion folgt, daß ad = bc. Es ist aber (nach Lehrs. 3.) die 2te Proportion richtig, wenn ad = cb; die dritte richtig, wenn bc = ad, die vierte richtig bc = da u. s. w.

§. 189.

Man übe sich hiebei, alle diese 7 Veränderungen sogleich aus der ersten Proportion zu lesen. Einige von diesen Veränderungen haben ihre eignen Namen erhalten; wir wollen davon nur folgende merken. Es entsteht die zweite Proportion aus der ersten durch Verwechselung (der mitlern Glieder) alternando:

Die dritte aus der ersten durch Verkehrung, (beider Verhältnisse) inuertendo.

Die

Die fünfte aus der ersten durch Vorsezung (des leztern Verhältnisses) anteponendo.

Die siebende aus der ersten durch Zurükslesung, relegendo.

Hieraus sind die Ausdrükke verständlich, wenn man sagt: wir wollen die Proportion verwechseln, verkehren ꝛc.

§. 190.

Eben so nöthig ist die Uebung, alle diese Proportionen aus der Gleichung $ad = bc$ zu lesen, und überhaupt eine jede Gleichung in eine Proportion aufzulösen, welches allemal geschehen kan.

Wenn z. B. $af = bnr$, so wird sein $a : b = nr : f$, oder auch $a : br = n : f$, auch $a : bnr$ $1 : f$, und dergleichen. Denn da in allen diesen Proportionen das Produkt der äußern Glieder die eine Seite, und das Produkt der innern Glieder die andere Seite der Gleichung giebt; so müssen nach Lehrsaz 3 alle diese Proportionen richtig sein.

Wenn $d = ab$; so ist $1 : a = b : d$. Eben so folgt aus der Gleichung $pqr = c$, daß $1 : pq = r : c$, auch daß $p : 1 = c : qr$. Die Gleichung $c(f+g) = 3pq$, kan in folgende Proportionen aufgelöset werden: $c : 3p = q : f+g$, $c : 3 = pq : f+g$, $p : f+g = c : 3q$, u. a. m. Die Gleichung $d = \frac{bc}{a}$ in folgende Proportion $a : b = c : d$, (Lehrsaz 2).

§. 191.

Fünfter Lehrsaz.

Wenn $a:b = c:d$, so ist
auch $ma:mb = c:d$
auch $ma:b = mc:d$
auch $a:b = mc:md$.

§. 192.

Beweis.

Alle diese Proportionen sind (nach Lehrsaz 3) richtig, wenn $mad = mbc$; es folgt aber aus der ersten angenommenen Proportion, daß $ad = bc$, folglich ist auch $mad = mbc$.

§. 193.

Sechster Lehrsaz.

Wenn $a : b = c : d$, so ist
auch $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$
auch $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$
auch $a : b = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$

§. 194.

Beweis.

Eine jede von diesen Proportionen ist richtig, wenn gewis ist, daß $\frac{ad}{n} = \frac{bc}{n}$, welches sein mus, da aus der ersten Proportion folgt, daß $ad = bc$.

§. 195.

§. 195.

Um die Richtigkeit der gewöhnlichen Verfahrungsart in der Regeldetri mit Brüchen zu zeigen, kan man einen Theil des fünften Lehrsazes auf folgende Weise vortragen.

Zu drei gegebnen Zahlen a, b, c, wird nach Lehrsaz 2 die vierte Proportionalzahl gefunden $= \frac{bc}{a}$; z. B.

in $a : b = c : x$, ist $x = \frac{bc}{a}$

es wird aber auch in der Proportion

$na : nb = c : x$ sein $x = \frac{nbc}{na} = \frac{bc}{a}$

auch in $na : b = nc : x$ sein $x = \frac{bnc}{na} = \frac{bc}{a}$

auch in $mna : mb = nc : x$ sein $x = \frac{mbnc}{mna} = \frac{bc}{a}$

woraus man deutlich einsieht, daß diejenige Zahl, welche man durch die Regeldetri sucht, nämlich die vierte Proportionalzahl, unverändert heraus kömt, wenn gleich das erste und zweite, oder das erste und dritte Glied durch einerlei Zahl multiplicirt wird, oder wenn endlich auch beides zugleich geschieht. Durch eine geschikte Multiplikation zweier Glieder aber kan man allemal, wenn ein Glied oder beide Glieder Brüche sind, solche Glieder in ganze Zahlen verwandeln, z. B. in folgender Aufgabe:

Pfund. Pfund. Rthlr. Rthlr.

$$2\tfrac{1}{3} : 4\tfrac{3}{5} = 6 : x$$

das ist a) $\frac{7}{3} : \frac{23}{5} = 6 : x$

multiplicirt man das erste und zweite Glied durch 3.5, so hat man

b) $\frac{3\cdot5\cdot7}{3} : \frac{3\cdot5\cdot23}{5} = 6 : x$

das ist c) $35 : 69 = 6 : x$, und findet $x = \frac{69\cdot6}{35}$

Ferner in folgender Aufgabe:

Pfund. Pfund. Rthlr.

$$1\tfrac{2}{5} : 5\tfrac{2}{4} = \tfrac{2}{3} : x$$

das ist A) $\frac{7}{5} : \frac{23}{4} = \frac{2}{3} : x$

multiplicirt man die beiden ersten Glieder durch 4.5, so erhält man

B) $\frac{4\cdot5\cdot7}{5} : \frac{4\cdot5\cdot23}{4} = \frac{2}{3} : x$

oder C) $4\cdot7 : 5\cdot23 = \frac{2}{3} : x.$

Ferner das erste und dritte Glied durch 3 multiplicirt, komt D) $4\cdot7\cdot3 : 5\cdot3\cdot23 = \frac{2\cdot3}{3} : x$

oder E) $84 : 345 = 2 : x$

§. 196.

Vergleicht man nun die Proportion bei c) mit der bei a) und ferner die Proportion bei E) mit der bei A); so übersieht man sogleich die Richtigkeit der bekanten Regel, nach welcher man jeden Nenner im zweiten oder dritten Gliede wegstreicht und damit in das erste Glied multiplicirt, und ferner den Nenner des ersten Gliedes wegstreicht und damit in das zweite oder dritte Glied multiplicirt,

um

um in allen dreien Gliedern ganze Zahlen zu erhalten.

§. 197.

Auf dem sechsten Lehrsaz gründen sich die bekanten Verkürzungen der Regeldetri durch gegenseitiges Aufheben oder gleichnamige Verkleinerung des ersten und zweiten, oder ersten und dritten Gliedes.

Man kan zu dieser Absicht einen Theil dieses Lehrsazes auf folgende Weise vortragen.

In $a : b = c : x$, ist $x = \frac{bc}{a}$

in $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : x$, ist auch $x = \frac{bcn}{an} = \frac{bc}{a}$

in $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : x$, ist auch $x = \frac{bcn}{na} = \frac{bc}{a}$

auch in $\frac{a}{mn} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : x$ ist $x = \frac{bcmn}{mna} = \frac{bc}{a}$

woraus erhellet, daß die durch die Regeldetri gesuchte vierte Proportionalzahl unverändert herauskömt, wenn man auch das erste und zweite, oder das erste und dritte Glied durch einerlei Zahl dividirt hat, oder wenn beides zugleich geschehen ist.

Siebentes Kapitel.

Anwendung der Lehrsäze von der Proportion zur Auflösung algebraischer Aufgaben.

§. 198.

XLV. Aufgabe.

Ich habe etliche Ellen Tuch gekauft, und für jede 5 Ellen gegeben 7 Rthlr.; darauf habe ich alles Tuch wieder verkauft, je 7 Ellen für 11 Rthlr. und bei diesem ganzen Handel 100 Rthlr. gewonnen: wie viel Ellen Tuch hab ich gehabt?

§. 199.

Auflösung.

Die Anzahl der Ellen sei x. Man berechne nun nach der Regel de tri wie viel x Ellen beim Einkauf gekostet haben.

So oft 5 Ellen enthalten sind in x Ellen; so oft ist auch der Preis von 5 Ellen enthalten in dem Preise von x Ellen; demnach ist

Ellen Ellen Rthlr.

5 : x = 7 : der Anzahl von Rthlr. welche x Ellen beim Einkauf kosteten, und welche also als die 4te Proportionalzahl ist $= \frac{7x}{5}$ Rthlr.

So

So viel hab ich also beim Einkauf ausgegeben, und eben so wird

	Ellen		Ellen		Rthlr.		Rthlr.	
nach	7	:	x	=	11	:	$\frac{11x}{7}$	gefunden,

daß ich $\frac{11x}{7}$ Rthlr. beim Verkauf gelöset habe.

Da ich nun 100 Rthlr. gewonnen habe; so mus ich beim Verkauf 100 Rthlr. mehr eingenommen haben, als ich beim Einkauf ausgegeben hatte; also mus sein

$\frac{11x}{7} = \frac{7x}{5} + 100$, folglich auch $\frac{5 \cdot 7 \cdot 11x}{7} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot x}{5} + 5 \cdot 7 \cdot 100$ das ist $55x = 49x + 3500$, daher, $6x = 3500$, und $x = \frac{3500}{6} = 583\frac{1}{3}$

Antwort: Es waren $583\frac{1}{3}$ Ellen. Nun findet man nach der Regel de tri, daß $583\frac{1}{3}$ nach den angegebnen Preisen beim Einkauf $816\frac{2}{3}$ Rthlr. gekostet haben, beim Verkauf aber für $916\frac{6}{3}$ Rthlr. verkauft sind, also 100 Rthlr. gewonnen ist.

§. 200.

XLVI. Aufgabe.

Ein Springbrunnen hat 4 Röhren: durch die erste allein wird die Cisterne, dessen Inhalt unbekant ist, in 2 Stunden vol, durch die zweite Röhre, in 3 Stunden, durch die dritte in 4 Stunden, und durch die vierte in 6 Stunden. Wie bald wird die Cisterne angefült, wenn alle 4 Röhren zugleich laufen.

§. 201.

Auflösung.

Der Inhalt der Cisterne sei = y Maß, die gesuchte Zeit = x Stunden, so wird sein

Stund.	Stund.	Maß	demjenigen, was in x Stund. läuft
2 :	x =	y :	$\frac{xy}{2}$ aus der ersten Röhre
3 :	x =	y :	$\frac{xy}{3}$ aus der zweiten Röhre
4 :	x =	y :	$\frac{xy}{4}$ aus der dritten Röhre
6 :	x =	y :	$\frac{xy}{6}$ aus der vierten Röhre

In x Stunden läuft demnach aus allen 4 Röhren zusammen heraus $\frac{xy}{2} + \frac{xy}{3} + \frac{xy}{4} + \frac{xy}{6}$

oder $(6xy + 4xy + 3xy + 2xy) : 12$

das ist $\frac{15xy}{12}$ Maß. Da nun diese Quantität gerade die ganze Cisterne anfüllen sol; so mus

sein $\frac{15xy}{12} = y$

also auch $15xy = 12y$, durch y dividirt

$15x = 12$, daher $x = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

In $\frac{4}{5}$ Stunden läuft nun aus der ersten Röhre $\frac{2y}{5}$, aus der zweiten $\frac{4y}{15}$, aus der dritten $\frac{y}{5}$, aus der vierten $2y$; und es ist in der That $\frac{2y}{5} + \frac{4y}{15} + \frac{y}{5} + \frac{2y}{15} = \frac{6y+4y+3y+2y}{15} = \frac{15y}{15} = y.$

§. 202.

XLVII. Aufgabe.

Ich habe für jemanden 906 Rthlr. eingenommen, und sol ihm davon gerade so viel schikken, daß das Geld, was er erhält, mit dem Postgelde, welches ich an meinem Orte bezahlen mus, und welches $\frac{2}{3}$ Rthlr. pro Cent. beträgt, genau die eingenommene Summe ausmacht. Wie viel mus ich auf die Post geben?

§. 203.

Auflösung.

Wenn ich x Rthlr. auf die Post gebe; so finde ich nach der Regel de tri 100 Rthlr. geben $\frac{2}{3}$ Rthlr. was geben x Rthlr.? daß von x Rthlr. das Postgeld $\frac{2x}{300}$ beträgt. Folglich wird x die verlangte Zahl von Rthlr. angeben, wenn es so groß angenommen wird

daß $x + \frac{2x}{300} = 906$; also mus

auch sein $300x + 2x = 271800$

das ist $302x = 271800$

daher $x = \frac{271800}{302} = 900$ Rthlr.

Antw. Ich mus 900 Rthlr. auf die Post geben; so wird das Postgeld davon $\frac{900 . 2}{300}$ Rthlr. das ist 6 Rthlr., also das abgeschikte Geld nebst dem Postgelde allerdings 906 Rthlr. betragen.

§. 204.
XLVIII. Aufgabe.

Ich bin Jemanden ein Kapital c schuldig: bei der Auszahlung fallen aber verschiedne Unkosten vor, z. B. für Porto, Agio, Expedition und dergleichen, welche sich auf u Rthlr. pro Cent. belaufen, und welche nicht ich, sondern der andere tragen mus: wie viel Geld mus ich auszahlen, damit das ausgezahlte Geld mit denen dabei vorfallenden Unkosten gerade das Kapital c ausmacht?

§. 205.
Auflösung.

Ich zahle aus x Rthlr.

Nun geben 100 Rthlr. u Rthlr. Unkosten, folglich x Rthlr. geben $\frac{u\,x}{100}$ Rthlr. Unkosten;

demnach mus $x + \frac{u\,x}{100} = c$

daher auch $100\,x + u\,x = 1000\,c$

oder $(100 + u)\,x = 1000\,c$

daher $x = \frac{1000\,c}{1000 + u}$ genommen werden

In der vorigen Aufgabe war $c = 906$, $u = \frac{2}{3}$ und man würde nach dieser Formel die abzuschikkende Summe $x = \frac{90600}{100 + \frac{2}{3}} = 90600 : \frac{302}{3}$ $= \frac{90600 . 3}{302} = 900$ Rthlr. wie in der vorigen Auflösung finden.

§. 206.

§. 206.

XLIX. Aufgabe.

Wie viel Geld mus ich ausleihen, wenn mir mit den einjährigen Zinsen à 5 pro Cent. nach einem Jahre gerade 1200 Rthlr. zurükgezahlt werden sollen?

§. 207.

Auflösung.

Ich verleihe x Rthlr. Nun ist

Rthlr. Kapital.		Rthlr. Kapit.		Rthlr. Zinsen.		Rthlr. Zinsen.
100	:	x	=	5	:	$\frac{5x}{100}$,

daher mus x so gros genommen werden,

daß $x + \frac{5x}{100} = 1200$ werde, also

auch $105x = 120000$

und $x = \frac{120000}{105} = 1142\frac{90}{105}$ Rthlr. sein

Auch diese Aufgabe hätte nach der §. 205. gefundenen Formel sogleich berechnet werden können, wo c die verlangte Schuld von 1200 Rthlr. und u die 5 Rthlr. einjährigen Zinsen von jedem 100 Rthlr. bedeuten kan, und man würde nach der algemeinen Formel, $x = \frac{100\,c}{100+u}$, für diesen bestimten einzelnen Fal ebenfals finden $x = \frac{120000}{105}$

§. 208.

§. 208.

L. Aufgabe.

Ein Weinhändler hat Franzwein, wovon 60 Maß 10 Rthlr. kosten, und Landwein, wovon 52 Maß nur 4 Rthlr. kosten, und wil aus beiden eine Vermischung machen, wovon er 51 Maß um 5 Rthlr. geben kan. Wie viel Maß Landwein und wie viel Maß Franzwein mus er zu diesen 51 Maß nehmen?

§. 209.

Auflösung.

Man seze er müsse x Maß Franzwein nehmen; so mus das übrige von 51 Maß, das ist, 51 — x die nöthigen Maße Landwein anzeigen. Man rechne nach der Regel de tri

60 Maß Franzw. kosten 10 Rthlr. was x Maß?
Antwort: $\frac{x}{6}$ Rthlr.

52 Maß Landw. kosten 4 Rthlr. was 51 − x Maß?
Antwort: $\frac{4.(51 - x)}{52} = \frac{51 - x}{13}$ Rthlr.

Da nun die ganze Vermischung von 51 Maß 5 Rthlr. kosten sol: so mus sein

$$\frac{x}{6} + \frac{51 - x}{13} = 5,$$

daher ferner $13x + 306 - 6x = 390,$

$$7x = 84$$
$$x = 12$$

Antwort.

Antwort. Man mus 12 Maß Franzwein und 51 — 12 das ist 39 Maß Landwein mit einander vermischen; so werden die 12 Maß Franzwein 2 Rthlr. die 39 Maß Landwein 3 Rthlr. also alle 51 Maß der Vermischung 5 Rthlr. kosten

§. 210.

LI. Aufgabe.

Von einem bessern Weine kosten a Maß b Rthlr. von einem geringern c Maß d Rthlr; aus beiden sollen f Maß dergestalt zusammengemischt werden, daß p Maß von dieser Vermischung für q Rthlr. verkauft werden können. Wie viel mus von dem bessern Weine, wie viel von dem schlechtern genommen werden?

§. 211.

Auflösung.

Von dem bessern Weine werden genommen x Maß, von den schlechtern (f — x) Maß. So viele mal mehr oder weniger nun a Maß ist als x Maß, so vielmal mehr oder weniger beträgt auch der Preis von a Maß, als der Preis von x Maß. Demnach ist

Maß Maß Rthlr. in Rthltn.

$a : x = b$: dem Preise von x Maß;

folglich giebt die vierte Proportionalzahl $\frac{bx}{a}$ den Preis von x Maß an. Eben so ist

Maß Maß Rthlr. derjenigen Zahl von Thalern

$c : f - x = d$:

welche

welche f — x Maß von dem schlechtern Weine kosten. Da nun diese vierte Proportionalzahl $= \frac{d(f-x)}{c}$ gefunden wird, so ist $\frac{bx}{a} + \frac{d(f-x)}{c} =$ dem Preise von f Maß des vermischten Weines. Wie viel nun diese f Maß kosten müssen, kan leicht aus der gegebenen Bestimmung gefunden werden, daß p Maß q Rthlr. kosten sollen. Es ist nämlich auch hier

Maß, Maß, der Preis von p Maß, dem Preise von f Maß.

$p : f = q$ Rthlr. $: \frac{fq}{p}$ Rthlr.

Also mus sein

$$\frac{bx}{a} + \frac{df-dx}{c} = \frac{fq}{p},$$ also auch durch ac

multiplicirt, $bcx + adf - adx = \frac{acfq}{p}$

und $bcx - adx = \frac{acfq}{p} - adf$

oder $(bc-ad)x = \frac{acfq - adfp}{p}$

folglich $x = \frac{acfq - adfp}{p(bc-ad)} = af. \frac{cq-dp}{p(bc-ad)}$

denn stat $acfq - apdf$ kan man nach §. 21. schreiben $af.(cq - pd)$ wodurch offenbar die Rechnung sehr erleichtert wird.

§. 212.

§. 212.

Diese Formel giebt nun die unter dem Namen der Allegations- oder Vermischungsrechnung bekante Rechnungsregel in ihrer grösten Algemeinheit an, und es kan auch im gemeinen Leben oft nüzlich und nöthig sein, einige ähnliche Aufgaben so algemein aufzulösen. In den gemeinen Rechenbüchern pflegt man sich indessen auf so verwikkelte Aufgaben nicht einzulassen; sondern behandelt nur gewisse einzelne Fälle, welche entweder die gewöhnlichsten, oder doch so beschaffen sind, daß man die übrigen durch hinlängliche Vorbereitung, obgleich oft mit einiger Weitläuftigkeit, darauf zurükbringen kan. Ein Weinhändler weiß es z. B. schon, oder kan es doch durch Berechnung finden, wie viel einerlei Quantität, als ein Oxhoft, ein Anker, ein Maß u. d. sowol von seinem bessern als schlechtern Weine kostet und von der Vermischung kosten sol, sobald er überhaupt den Preis von irgend einer andern Quantität dieser Weine weiß. Daher kan man in den gewöhnlichsten Fällen zurechte kommen, wenn man nur folgende Aufgabe aufzulösen weiß.

§. 213.

LII. Aufgabe.

Ein gewisses Maß (es sei ein Oxhoft, oder Anker o. d.) guter Wein kostet g Rthlr. eben dasselbe Maß von dem schlechtern Weine kostet s Rthlr. man sol eine Mischung von beiden machen, wovon ein

ein solches Maß auf m Rthlr. zu stehen komt; wie viel mus man zu diesem Maße solcher Vermischung von dem guten, wie viel von dem schlechtern Weine nehmen?

§. 214.

Auflösung.

Derjenige Theil dieses Maßes, welcher von dem guten genommen werden mus, sei $= x$, so mus der übrige Theil $1 - x$ von dem schlechtern Weine genommen werden.

Nach $1 : g = x : gx$

und $1 : s = 1 - x : s - sx$

findet man nun, das der Theil des guten Weines, welcher zur Vermischung genommen wird, gx Rthlr. der übrige Theil des schlechtern $s - sx$ Rthlr. kostet. Wenn daher die ganze Vermischung m Rthlr. kosten sol; so mus sein

$$gx + s - sx = m$$

daher auch $gx - sx = m - s$

oder $(g - s)\,x = m - s$

daher $x = \dfrac{m - s}{g - s}$.

§. 215.

Diese Formel giebt nun die bekante Regel der Allegationsrechnung an; nach welcher man 1) von dem Preise der Vermischung den Preis des schlechtern Weines, 2) von dem Preise des bessern Weines den Preis des schlechtern abzieht, 3) durch die

lezte

lezte Differenz in die erstere dividirt und dadurch den Theil, welcher von dem besten Weine genommen werden mus, in einer gebrochenen Zahl erhält.

§. 216.

Es braucht wol kaum erinnert zu werden, daß die Buchstaben m, g, s, welche hier die Preise verschiedner Weine bedeuten, eben so wol auch die Preise verschiedener andern Sachen bedeuten können, welche mit einander vermischt werden sollen; und daß allemal der für x gefundene Werth diejenige Quantität anzeigt, welche von der bessern Sache zur Vermischung zu nehmen ist, wenn man immer g den Preis der bessern Sache, s den Preis der schlechtern und m den Preis der Vermischung bedeuten läst. Z. B. wenn folgende Aufgabe: Es wil jemand Roggen, wovon der Scheffel 2 Rthlr. und Gersten, wovon der Scheffel $1\frac{1}{4}$ Rthlr. kostet, dergestalt vermischen, daß ein Scheffel dieses vermischten Getraides auf $1\frac{1}{2}$ Rthlr. zu stehen komt; wie viel Roggen und wie viel Gersten mus er zu einem Scheffel vermischten Getraides nehmen? — mit der vorhergehenden algemeinen Aufgabe verglichen wird: so ist nach obiger Formel der Theil, welcher vom bessern Getraide, dem Roggen zu nehmen ist, $x = \frac{m - s}{g - s}$ $= (1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}) : (2 - 1\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}$ (p. 8. VI.) $= \frac{1}{3}$, und der übrige Theil von Gersten also $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ Scheffel.

§. 217.

LIII. Aufgabe.

Ein Wechsler hat zweierlei Münze; von der ersten Sorte gehen a Stük auf einen Rthlr. von der zweiten Sorte b Stük. Nun wil jemand c Stük für einen Rthlr. haben; wie viel Stük wird der Wechsler von der ersten, wie viel von der zweiten Sorte geben müssen?

§. 218.

Auflösung.

Der Wechsler gebe von der ersten Sorte x Stük, also von der andern $c - x$; so sind die x Stük von der ersten Sorte Werth $\frac{x}{a}$ Rthlr. indem $a : 1 = x : \frac{x}{a}$, und die $c - x$ Stük von der leztern Sorte werth $\frac{c - x}{b}$ Rthlr. indem $b : 1 = x : \frac{c - x}{b}$;

Also mus sein $\frac{x}{a} + \frac{c - x}{b} = 1$,

folglich auch $bx + ac - ax = ab$,

und $bx - ax = ab - ac$,

oder $(b - a)x = ab - ac$,

daher $x = \frac{ab - ac}{b - a} = \frac{a(b - c)}{b - a}$.

§. 219.

Wenn man diese Gleichung $x = \frac{a(b-c)}{b-a}$ nach §. 190. in folgende Proportion $b-a : b-c = a : x$ auflöset; so siehet man, auf welche Art man x durch die Regel de tri aus den gegebnen Zahlen finden könne.

§. 220.

LIV. Aufgabe.

Ein Wechsler hat 2 und 4 Gr. Stükke; es wil jemand 10 Stükke Geld haben, welche 1 Rthlr. werth sind. Wie viel mus der Wechsler von jeder Sorte geben?

§. 221.

Auflösung.

In dieser Aufgabe ist $a=6$, $b=12$, $c=10$, daher findet man sogleich nach der Formel $x = \frac{a(b-c)}{b-a} = \frac{6(12-10)}{12-6} = \frac{6.2}{6} = 2$, welches die Anzahl der 4 Gr. Stükke sein mus, so wie $10-2$, das ist 8, die Anzahl der 2 Gr. Stükke ist.

Nachdem die im sechsten Kapitel vorgetragenen Lehrsäze bekant gemacht, und durch einige Aufgaben dieses Kapitels geübt sind, können die unter den Nummern 37 . . . 42. angeführten Säze von der Aehnlichkeit und Proportion der Figuren und Linien vorgenommen werden.

Achtes Kapitel.

Von der Multiplikation und Division in Linien.

§. 222.

Daß in einer jeden Proportion $a : b = c : d$, allemal $d = \frac{bc}{a}$ ist §.182. gelehrt worden. Sezt man nun $a = 1$, so ist in $1 : b = c : d$, die vierte Proportionalzahl $d \left(= \frac{bc}{1}\right) = bc =$ dem Produkte der beiden mitlern Glieder. Eben so ist in $1 : mn = \frac{p}{q} : d$ die vierte Proportionalzahl $d = \frac{mnp}{q} =$ einem Produkte, dessen beide Faktoren, mn und $\frac{p}{q}$, die beiden innern Glieder der Proportion ausmachen; und man kan demnach sagen, multipliciren heisse die vierte Proportionalzahl zur Einheit und den beiden Faktoren finden.

§. 223.

Wenn ich ferner in einer Proportion das 2te Glied $= 1$ seze: so ist in $a : 1 = c : d$, $d = \frac{c}{a}$ $=$ dem Quotienten, welcher durch die Division von

a

a in c entsteht. Dividiren heißt daher die vierte Proportionalzahl zu dem Divisor, der Einheit und dem Dividendus finden.

§. 224.

Diese Betrachtung gibt uns nun sehr deutliche Begriffe von dem Produkte und dem Quotienten, nach welchen das Produkt P aus zweien Faktoren A und B eine Zahl ist, in welcher der eine Faktor B eben so enthalten ist, wie die Einheit (1) in dem ersten Faktor A, indem $1 : A = B : P$, und der Quotient Q aus $\frac{S}{R}$ eine Zahl ist, welche aus dem Dividendus S eben so, wie die Einheit aus dem Divisor entsteht, indem $R : 1 = S : Q$ ist. Diese Begriffe sind bei der Anwendung sowol der gewöhnlichen als algemeinen Zahlenrechnung auf geometrische Größen von ungemeinem Nuzen, weil sie uns die Uebereinstimmung gewisser geometrischen Operationen mit der Multiplikation und Division in Zahlen deutlich vor Augen stellen. Bevor wir aber dieses weiter entwikkeln, wollen wir noch einige Begriffe von der Multiplikation zweier benanten Zahlen etwas auseinandersezen.

§. 225.

Wenn ich sage: 1 Pfund kostet 4 Groschen, also kosten 6 Pf. 24 Gr.; so schließe ich, es mus sich verhalten 1 Pf. : 6 Pf. = 4 Gr. zu der Anzahl Groschen,

Groschen, welche 6 Pf. kosten. Diese 24 Groschen entstehen also, indem zwei benante Zahlen, nämlich die Zahl der Groschen 4 und die Zahl der Pfunde 6 in einander multiplicirt werden. Kan ich aber nun wohl sagen, daß 4 Groschen durch 6 Pfund multiplicirt, oder 4 Groschen 6 Pfund mal genommen werden? Wenn bei dieser Multiplikation die Art und Größe der Einheit worauf sich die Zahl 6 beziehet, welche hier ein gewisses Gewicht, 1 Pfund ist, auf das erhaltene Produkt von 24 Gr. wirklich einigen Einflus hätte; so könte ich gewis nicht auch in folgenden Aufgaben: 1 Elle kostet 4 Gr. was kosten 6 Ellen; oder 1 Centner kostet 4 Gr. was kosten 6 Centner; oder 1 Schok Aepfel kostet 4 Gr. was kosten 6 Schok Aepfel, beständig dasselbe Produkt von 24 Gr. erhalten, weil alsdann 4 Gr. 6 Ellen mal, oder 4 Gr. 6 Schok Aepfel mal genommen nothwendig etwas anders geben müsten, als 4 Gr. 6 Pfund mal genommen. Dis mus uns sogleich auf die Gedanken bringen, daß die Einheit, worauf sich die Zahl 6 beziehet, gar keinen Einflus auf das Produkt 24 Gr. haben kan, und in der That hat es mit der Multiplikation zweier benanten Zahlen folgende Bewandnis. Nur der Eine Faktor, in den angegebnen Fällen die 4 Gr., wird wirklich als eine benante Zahl betrachtet, den man daher den Realfaktor nennen kan; der andere Faktor mus nur als eine ganz algemeine Zahl angesehen werden, welche durch ihren Werth anzeigt, wie oft die algemeine

Einheit (1) in ihr enthalten sei, und also auch der Realfaktor in dem Produkte enthalten sein sol. Ich mögte diesen leztern Faktor den Rationalfaktor nennen, weil er das Verhältnis angibt, worin er selbst gegen die Einheit stehet, und worin also auch das Produkt gegen den Realfaktor stehen sol.

Auch in folgender Aufgabe: 1 Rthlr. Kapital gibt $\frac{5}{100}$ Rthlr. Zinse, was geben 4 Rthlr. Kapital? wo nach der Proportion

1 Rthlr. Kapital : 4 Rthlr. Kapital
$= \frac{5}{100}$ Rthlr. Zinse : $\frac{4 \cdot 5}{100}$ Rthlr. Zinse,

die gesuchten Zinsen gefunden werden, indem man 4 Rthlr. Kapital in die $\frac{5}{100}$ Rthlr. Zinsen multiplicirt, und wo also diese beiden benanten Zahlen sich auf einerlei Einheit, nämlich 1 Rthlr. beziehen, wird doch der eine Rationalfaktor 4 offenbar nur als eine unbenante Zahl angesehen. Eben so kan ich auch von den beiden benanten Zahlen 2 Zol und 3 Zol gar wol sagen; ich wil 2 Zol 3 mal nehmen, oder auch, ich wil 3 Zol 2 mal nehmen; aber man solte nie sagen, daß man 3 Zol durch 2 Zol multipliciren wolle: indem 3 Zol 2 Zol mal nehmen, eben so wenig einen schiklichen Sinn haben kan, als 3 Rthlr. 2 Rthlr. mal oder 4 gr. 6 Pf. mal nehmen. Es wird vielmehr auch hier der eine von den beiden Faktoren z. B. 3″ als der Realfaktor und der andere 2, als der Rationalfaktor angesehen und in der Proportion: $1 : 2 = 3'' : 6''$ das vierte Glied, als das Produkt von $2 \cdot 3''$, gleich 6″ gefunden.

§. 226.

Nunmehr werden wir die vorhererwähnte Uebereinstimmung gewisser geometrischen Operationen mit der Multiplikation in Zahlen mit Deutlichkeit übersehen können. Gesezt es wäre (Fig. 9.) eine Linie AB = 2″ und eine andre AC = 3″ gegeben; so kan ich noch eine dritte Linie AV dergestalt annehmen, daß sich AV : AB verhält wie 1 : 2, welche AV in diesem Falle = 1″ zu nehmen ist. Finde ich nun (nach der Num. 42. der geometrischen Säze gelehrten Konstruktion) zu diesen drei Linien AB, AV, AC die vierte Proportionallinie AX dergestalt, daß AV : AB = AC : AX wird; so mus diese Linie AX, in welcher die AC (= 3″) eben so oft, als AV in der AB (also 2 mal), enthalten ist, ganz offenbar = 6″ gefunden werden. In so ferne nun die Zahl des Maßes dieser AX gleich ist dem Produkte derer beiden Zahlen, welche das Maß von der AB und AC angeben, in so ferne kan ich gar wol sagen, daß diese AX das Produkt der beiden Linien AB und AC sei, und in diesem Verstande kan ich allemal das Produkt zweier gegebnen Linien durch geometrische Konstruktion finden, indem ich zur Linie der Einheit und zu den beiden gegebnen Linien die vierte Proportionallinie finde.

§. 227.

Die Einheitslinie AV muste in diesem Falle nur darum gerade = 1″ genommen werden, weil die AC = 2″ gegeben war und also keine andre Größe außer

außer 1″ sich zur AC verhält wie 1 : 2. Ich würde aber die AX von derselben Größe = 6″ gefunden haben, wenn ich stat AV eine andere Einheitslinie AU (Fig. 9.) von jeder beliebigen Größe, aber auch alsdan stat AB eine andere Linie AB derlgestalt angenommen hätte, daß sich wiederum verhielte AU : AB = 1 : 2. Denn wenn nur das Verhältnis AU : AB gleich ist dem Verhältnisse AV : AB; so wird offenbar eben so wol in der Proportion AU : AB = AC : AX

als in AV : AB = AC : AX

die AX gleich 6″ gefunden werden. So kan ich also z. B. das Produkt 3 . 4″ durch geometrische Konstruktion in Linien finden, indem ich eine Einheitslinie AV von beliebiger Größe, und dazu eine andere Linie AC so groß nehme, daß 1 : 3 = AV : AC wird, und in AV : AC = eine Linie von 4″ : AX die vierte Proportionale AX geometrisch bestimme. (*)

(*) Diese Multiplikation in Linien ist also ganz verschieden von der so genanten Multiplikation der Höhe und Basis bei der Bestimmung eines Flächenraums. Hiebei werden eigentlich ganz und gar keine Linien multiplicirt, und man mus sich darüber folgender Maßen ausdrükken: Die Zahl der Zolle in der Grundlinie multiplicirt in die Zahl der Zolle in der Höhenlinie giebt eine Zahl, welche anzeigt, wie viel Quadratzolle in der Fläche des Parallelogrammes Plaz haben. Daß dieses allemal zutreffen müsse, ist bei jedem

§. 228.

Wenn in den vier Proportionallinien (Fig. 10.) AB : AV = AC : AQ, das Verhältnis der beiden ersten AB : AV gleich 4 : 1 ist; so mus, wenn die dritte AC = 8″ angenommen wird, die vierte proportionale AQ = 2″ gefunden werden. Da nun die Zahl 2″ der Quotient ist aus $\frac{8}{4}$″; so kan ich auch sagen, daß die AQ als der Quotient der Linien $\frac{AC}{AB}$ angesehen, und demnach der Quotient aus jeden zwei gegebenen Linien durch geometrische Ver-

jedem Rechtekke klar, und durch geometrische Vergleichung der Flächenräume anderer Figuren mit dem Rechtekke, ergeben sich alsdenn auch die bekanten Regeln für die Ausmessung anderer Figuren. Durch die Multiplikation zweier Linien kan aber niemals eine Fläche hervorgebracht werden, nicht sowohl deshalb, weil unzählige Linien von 0 Breite zusammengenommen ebenfals 0 Breite geben müssen; denn was könte uns hindern stat der mathematischen Linien, körperliche Linien von einiger obwol sehr geringen Breite anzunehmen, wenn wir dadurch zu dieser neuen Vorstellung gelangen könten: sondern weil unmöglich zwei Faktoren eines Produktes als benahmte Zahlen betrachtet werden können, so daß durch eine gewisse Multiplikation der Nahmen selbst ein neuer Nahme entstehen könte, welcher gleichsam das Produkt zweier andrer Nahmen wäre.

Verzeichnung gefunden werden kan, indem man zur Linie des Divisors, zur Einheitslinie und zur Linie des Dividendus die vierte Proportionallinie findet.

§. 229.

Vier Proportionallinien AB : AC = AD : AF mögen nun endlich von so verschiedener Größe sein, als man nur wil; so wird sich doch allemal eine kleine Linie als ein Maß annehmen lassen, aus welchem jede dieser Linien zusammengesezt werden kan. Wenigstens müssen die Fehler, welche dabei noch gemacht werden, kleiner als das angenommene Maß selbst sein, und da man das Maß nach Belieben klein annehmen kan; so kan auch der Fehler gar bald so gering gemacht werden, daß er sich unsern Augen völlig entzieht. Wenn ich nun die Zahl dieses Maßes in AB, b in AC, c in AD, d in AF, f nehme; so werden auch diese Zahlen ganz nothwendig proportional und b : c = d : f sein. Daher wird f (die Zahl der Maße in AF) = $\frac{dc}{b}$ sein, und in so fern ich mir jede vier Proportionallinien als vier durch Zahlen auszudrükkende Größen vorstellen kan, kan ich auch behaupten, daß der Ausdruk $\frac{AC \cdot AD}{AB}$ die vierte Proportionallinie zu AB : AC = AD anzeige, und daß überhaupt alle Lehrsäze von den Proportionen in Zahlen auch auf proportionale Linien angewandt werden können.

§. 230.

LV. Aufgabe.

Die Höhe zu einem Parallelogram zu finden, wozu die Grundlinie gegeben ist, so daß das Parallelogram einem andern gleich werde, dessen Grundlinie und Höhe gegeben sind.

§. 231.

Vorbereitung.

Die Grundlinie des ganz bekanten Parallelograms (Fig. 5.) sei MN, die Höhe desselben QN.

Die gegebne Grundlinie des verlangten Parallelograms AB, die gesuchte Höhe BD.

Man zeichne sich, um die Forderungen der Aufgabe deutlich vor Augen zu haben, außer dem gegebnen Parallelogram (Fig. 5.) auch ohngefähr das verlangte Parallelogram (Fig. 6.)

§. 232.

Auflösung.

Wenn nun das leztere wirklich das verlangte Parallelogram sein sol; so mus, indem wir uns unter MN, QN, ꝛc. die Zahlen vorstellen, wodurch diese Linien ausgedrukt werden können,

$$MN \cdot QN = AB \cdot BD$$

folglich auch $\frac{MN \cdot QN}{AB} = BD$ sein.

Diese gefundene Formel läst sich nun in folgende Proportion auflösen, $AB : MN = QN : BD$, woraus

woraus sich ergibt, daß man die verlangte BD findet, indem man zu den Linien AB, MN, QN, die vierte Proportionallinie verzeichnet.

§. 233.

Wir haben ähnliche Aufgaben schon im fünften Kapitel dergestalt aufgelöset, daß wir die Größen der gegebenen Linien durch bestimte oder algemeine Zahlen, und dadurch die Forderung der Aufgabe in einer algebraischen Gleichung ausdrükten. Durch die gewöhnliche Auflösung einer solchen Gleichung fanden wir alsdan eine Formel für die Größe der gesuchten Linie, welche darauf nach einer solchen Formel berechnet und in Zahlen gefunden wird. Eine solche Auflösung heist eine arithmetische oder algebraische Auflösung einer geometrischen Aufgabe. Wenn man aber aus den gegebnen Linien, ohne dieselbe als Zahlen zu betrachten, blos vermittelst geometrischer Operationen durch Cirkel und Lineal, nach den Lehrsäzen der Geometrie die gesuchten Linien findet; so hat man die Aufgabe geometrisch aufgelöset. Wir werden zu seiner Zeit einige Beispiele von einer ganz reinen geometrischen Auflösung geben, fürs erste aber die bei dieser Aufgabe gebrauchte Methode ferner in einigen Aufgaben anwenden; so daß wir die gegebnen Größen als Zahlen behandeln, die Forderungen der Aufgabe in algebraischen Gleichungen ausdrükken, und diese Gleichungen bis zu dem simpelsten Ausdruk algebraisch auflösen, und nach dieser

Formel durch geometrische Operation die gesuchte Linie finden.

§. 234.

LVI. Aufgabe.

Die Grundlinie eines Parallelogrammes zu finden, dessen Höhe FH sein sol, dergestalt, daß dies Parallelogram 3 mal so groß werde, als ein anderes gegebnes, dessen Grundlinie AB und Höhe BD ist.

§. 235.

Auflösung.

Da diese 3 gegebnen Linien allemal nach irgend einem Maße gemessen, und also ihre Längen durch Zahlen ausgedrukt werden können, welche sich auf dieses Maß beziehen; so wollen wir sezen, die Zahl der Maße in A B sei b, in BD sei h, in FH sei a. Sezen wir ferner die Zahl der gesuchten Grundlinie sei x; so mus nach den Forderungen der Aufgabe $ax = 3bh$; folglich $x = \frac{3bh}{a}$ sein. Wenn wir nun diejenige Linie, in welcher die Zahl der Maße $\frac{bh}{a}$ ist, L nennen, so werden, da $\frac{bh}{a}$ die vierte Proportionalzahl zu a, b, h, und daher $a : b = h : \frac{bh}{a}$ ist, auch die durch diese Zahlen bestimten vier Linien proportional, also FH

FH : AB = BD : L sein. Man finde also diese vierte Proportionallinie L durch geometrische Zeichnungen, und seze diese Linie 3 mal aneinander, so wird die dadurch bestimte Linie $= 3\,L = \frac{3\,b\,h}{a} = x$ sein, und die gesuchte Grundlinie angeben.

§. 236.

Für die XXXIX. Aufgabe ist §. 155 die Formel $x = \frac{3\,b\,h.}{2\,\beta}$ Um auch nach dieser Formel, nicht die Zahl x der gesuchten Linie durch Berechnung, sondern unmittelbar die gesuchte Linie durch geometrische Konstruktion zu bestimmen; so dürfte man nur nach der Proportion $2\,\beta : 3\,b = h : L$ die vierte proportionale L geometrisch verzeichnen, indem man stat $2\,\beta$, 3 b, h, die zu diesen Zahlen gehörigen Linien nimt, und es müste die Zahl der Maße in der so bestimten $L = \frac{3\,b.h}{2\,\beta} = x$ sein.

§. 237.

LVII. Aufgabe.

Es ist ein Quadrat und ein Triangel, und die Grundlinie zu einem andern Triangel gegeben. Welche Höhe müs ich diesem Triangel geben, damit sein Flächenraum anderthalbmal so gros sei, als der Flächenraum des gegebnen Quadrates und Triangels zusammengenommen?

§. 238.

§. 238.

Auflösung.

Es sei die Zahl einer Seite des Quadrates $= q$, die Zahl der Grundlinie im gegebnen Triangel $= g$ die Zahl der Höhenlinie im gegebnen Triangel $= h$ die Zahl der gegebnen Grundlinie $= \beta$ und der gesuchten Höhe des verlangten Triangels $= x$: so sol sein

$$\frac{\beta x}{2} = \frac{3}{2}\left(q^2 + \frac{g h}{2}\right)$$, durch 2 multiplicirt

$$\beta x = 3\left(q^2 + \frac{g h}{2}\right)$$, durch β dividirt

$$x = 3\left(\frac{q^2}{\beta} + \frac{g h}{2 \beta}\right)$$

Nimt man nun stat dieser Zahlen, die dadurch bezeichneten Linien, so findet man nach der Proportion $2 \beta : g = h : L$ die Linie $L = \frac{g h}{2 \beta}$

und nach $\beta : q = q : l$, die $l = \frac{q^2}{\beta}$. Man seze nun die beiden Linien L und l zusammen; so wird diese Summe dreimal genommen eine Linie $= 3 (L + l) = 3 \left(\frac{g h}{2 \beta} + \frac{q^2}{\beta}\right) = x$ geben, und daher die gesuchte Höhe bestimmen.

Erster

Erster Anhang.

Aufgaben ohne Auflösung.

I.

Ein Vater hinterläst drei Söhne und 1500 Rthlr. Nach seinem Testamente sol der älteste Sohn 200 Rthlr. mehr haben als der zweite, der zweite aber, 100 Rthlr. mehr als der dritte: wie viel bekomt ein jeder?

II. Ein Man sagt: meine Frau ist 30 Jahr älter als meine Tochter, ich bin 22 Jahr älter als meine Frau; unser aller Alter zusammenaddirt gibt 100. Wie alt war der Man, die Frau, die Tochter?

III. Ein Vater sagte: mein ältester Sohn ward geboren, da ich 30 Jahr, mein jüngster, da ich 34 Jahr alt war; izt beträgt mein Alter und das Alter meiner beiden Söhne zusammengenommen 146 Jahr; wie alt war der Vater, wie alt jeder Sohn?

IV. Eine Witwe sol sich mit ihren 2 Söhnen und 3 Töchtern in einer Summe von 11000 Rthlr. dergestalt theilen, daß ein Sohn zweimal mehr be-

kömt als eine Tochter, und sie selbst so viel als beide Söhne. Wie viel bekomt ein jedes?

V. Cajus hinterlies ein Testament, in welchem er folgendes verordnet hatte. Meine Frau sol die Hälfte meines ganzen Vermögens haben, mein Bruder gerade so viel, als der dritte Theil des ganzen Vermögens beträgt, und was übrig bleibt sol der Kirche zufallen. Das was der Kirche zufiel betrug gerade 100 Rthlr.; wie groß war das ganze Vermögen? 600 Rthlr

VI. Ein Vater hinterläst 4 Söhne, welche sein hinterlassenes Vermögen folgender Gestalt unter sich theilen. Der erste nimt 3000 Rthlr. weniger als die Hälfte des Ganzen, der zweite nimt 1000 Rthlr. weniger als $\frac{1}{3}$ des Ganzen, der drtte nimt genau den vierten Theil des Ganzen, der vierte nimt 600 Rthlr. und den fünften Theil der ganzen Erbschaft: wie groß war die Erbschaft, und wie viel hat ein jeder bekommen?

VII. Die Glokke hat X geschlagen, rief ein Nachtwächter aus. Wie viel hats geschlagen? fragte ihn ein Schwärmer, und jener erwiederte: die Hälfte, das Drittheil und das Viertheil der

Stunden

Stunden ist um 1 größer als ihre Anzahl. Welches war die Anzahl der Stunden?

VIII. Eine Mühle hat 3 Mühlgänge von verschiedner Größe. In einer Stunde wurden auf dem ersten, 3 Scheffel, auf dem zweiten, 2 Scheffel und auf dem dritten nur anderthalb Scheffel abgemahlen: in wie viel Stunden kan die ganze Mühle 13 Wispel abmahlen?

IX. An einem Baue haben täglich gearbeitet 1 Meister, 3 Gesellen, 2 Lehrbursche und 4 Handlanger. Der Meister bekam täglich 16 Gr. ein Geselle 12 Gr. ein Lehrbursche 8 Gr. und ein Handlanger 6 Gr. das ganze Arbeitslohn betrug 92 Rthlr. wie lange hat der Bau gedauret? 30 Tage.

X. Man findet den Brief eines feindlichen Officiers, worinnen er schreibt: die Hälfte meines Kommando ist gefangen, der vierte Theil auf dem Plaze geblieben, und der siebente Theil hart verwundet; folglich habe ich nur noch 3 Man bei mir. Wie groß ist sein Kommando gewesen? 28 Mann

XII. Nachdem jemand den dritten und fünften Theil seines mitgebrachten Geldes in einer

Wette verlohren und ausgezahlet hatte, blieben ihm noch 35 Rthlr. übrig. Wie viel Geld hat er bei sich gehabt?

XII. Ein anderer hatte mit dreien Personen gewettet; mit dem ersten um $\frac{1}{3}$, mit dem zweiten um $\frac{1}{4}$ und mit dem dritten um $\frac{1}{8}$ von allem Gelde, was er bei sich hatte. Nachdem er die beiden ersten Wetten verlohren und die dritte gewonnen hatte, hatte er überhaupt 11 Gr. verlohren: wie viel Geld hat er bei sich gehabt?

XIII. Alexander sprach zu seinen Generalen: ich bin 2 Jahr älter als Ephestion; Clytus sagte: ich bin 4 Jahr älter als ihr beide; Calisthenes sezte hinzu: mein Vater ist 96 Jahr alt, und folglich so alt, als ihr alle drei zusammen. Wie alt war ein jeder?

XIV. Der Fuß einer Säule ist $5\frac{1}{2}$ Fuß hoch, das daraufstehende Holzwerk beträgt die Hälfte der ganzen Säule, über dem Holze liegt Kupfer, dessen Höhe $\frac{1}{5}$ und darüber eine Vergüldung, dessen Höhe $\frac{1}{7}$ der ganzen Säule ausmacht. Wie hoch war die Säule?

XV. Ein Vater hinterläßt seinen 11 Kindern 3600 Rthlr. mit der Verordnung, daß eine jede Tochter 360 Rthlr. ein jeder Sohn 300 Rthlr. erhalten solle. Bei der Theilung gieng das Vermögen gerade auf; wie viel Söhne und wie viel Töchter waren da?

XVI. In einer Stadt liegen Reuter und Infanteristen, zusammen 300 Man. Ein Infanterist bekömt monatlich 5 Rthlr. ein Reuter 8 Rthlr. und der ganze Sold beträgt monatlich 1800 Rthlr. wie viel Reuter und wie viel Infanteristen waren in der Stadt?

XVII. Zwei Hirten, A und B, hatten ein jeder eine Heerde Schaafe, und fanden, daß wenn A an B 30 Schafe abgeben wolte, beide Heerden gleich groß, daß aber die Heerde des A dreimal so groß als die Heerde des B sein würde, wenn B an A 40 Schafe abgeben müste. Wie viel Schafe hielt eine jede Heerde?

XVIII. Man weiß daß 4 Pfund frischer und 3 Pfund gesalzener Lachs zusammen für $2\frac{1}{2}$ Rthlr. ferner, daß 2 Pfund frischer und 1 Pfund gesalzener

Lachs zusammen für 1 Rthlr. verkauft sind: wie hoch ist ein Pfund frischer, wie hoch ein Pfund gesalzener Lachs angerechnet?

XIX. Eine Stadt ist in 3 Theile abgetheilt und sol 900 Rthlr. Kontribution zusammenbringen, dergestalt, daß der zweite Theil zweimal so viel zahlet, als der erste, weniger 17 Rthlr. der dritte Theil $\frac{2}{3}$ so viel als der erste, und noch 11 Rthlr. Wie viel mus jeder Theil zusammenbringen?

XX. 20 Personen, Männer und Weiber, sind in einem Wirthshause. Die Männer verzehren zusammen 24 Fl. alle Weiber zusammen auch 24 Fl. und man weiß, daß ein Man einen Gulden mehr zahlen muste, als ein Weib, welches 2 Gulden zahlte: wie viel Männer und wie viel Weiber waren da? 12 Weiber 8 Männer

XXI. Ich habe 2 und 8 Groschen Stükke, und es wil jemand von mir 15 Stük Geld haben, welche gerade $3\frac{1}{2}$ Rthlr. werth sein sollen. Kan ich dis mit meinen beiden Geldsorten möglich machen, und wie viel Stükke mus ich von jeder Sorte dazu geben?

XXII.

XXII. Eine Stadt solte einen Tribut erlegen. Nachdem jedes Haus 5 Rthlr. gegeben hatte, so fehlten noch 42 Rthlr. zur verlangten Summe. Nachdem jedes Haus noch 1 Rthlr. nachgegeben, also überhaupt 6 Rthlr. gegeben hatte, so blieben 58 Rthlr. übrig: Wie viel Häuser waren in der Stadt, und wie hoch war der Tribut?

XXIII. Nachdem von einer Geselschaft jede Person 4 Rthlr. gegeben hatte, hatte man 20 Rthlr. zu wenig um die ganze Zeche zu bezahlen, und nachdem jeder noch 2 Rthlr. nachgeschossen hatte; so behielt man nach Bezahlung der Zeche uoch 30 Rthlr. übrig. Wie viel Personen waren in der Geselschaft, und wie hoch belief sich die Zeche?

XXIV. Zwei Malter Roggen und 8 Malter Waizen kosten zusammen 64 Rthlr. drei Malter Roggen und 6 Malter Waizen kosten 54 Rthlr. Wie viel kostet eine Malter von jedem?

XXV. Ein Meister hatte mit einem Gesellen den Kontrakt geschlossen, daß er ihm für jeden Tag, wo er arbeiten könte, außer der Kost noch 8 Gr. geben, für jeden Tag aber, wo er nicht arbeiten

würde, $2\frac{1}{2}$ Gr. für die Kost bezahlt haben wolle. Als der Meister nach Verlauf von 15 Tagen seinem Gesellen 3 Rthlr. ausgezahlt hatte, so sagte dieser zu seinem Freunde, daß der Meister ihm um 8 Gr. zu wenig gegeben hätte; denn wenn er gleich nicht mehr wisse, wie viel Tage er eigentlich gearbeitet, so habe er doch immer von einem Tage zum andern in Gedanken behalten, wie viel ihm der Meister noch schuldig sei. Wie viel Tage hatte der Geselle gearbeitet?

XXVI. Unter mehrern Personen ist ein Ring verstekt: man sol durch eine künstliche Rechnung finden, bei welcher Person, an welchem Finger und Gliede sich der Ring befindet.

Nachdem man eine beliebige Ordnung bestimt hat, nach welcher die Personen, Finger und Glieder gezählt werden; so lasse man mit diesen Zahlen ohngefähr solche Veränderungen machen, wie in der XXV. Aufgabe pag. 89. bis man sich die Zahl, welche nach diesen Veränderungen herauskömt, angeben läst, um davon auf die anfangs gesezten Zahlen zu schließen.

Zweite

Zweite Abtheilung

zum Gebrauch

der

Zweiten Klasse.

Neuntes Kapitel.

Von der Multiplikation und Division positiver und negativer Größen.

§. 239.

Da man durch die algebraischen Zahlen außer den Grössen der Dinge auch gewisse Beziehungen, worinnen einige Dinge gegen einander stehen, durch die Zeichen + und — auszudrükken pflegt; so entsteht bei der algebraischen Multiplikation und Division die Frage, was für ein Zeichen dem Produkte oder dem Quotienten zukömt, wenn positive und negative, oder negative und negative Grössen rc. in einander multiplicirt oder dividirt werden. Wir haben uns zwar bisher willig finden lassen, auch ohne Beweis zu glauben, nicht nur, daß z. B. $+ 2 . + 3 = + 6$ und überhaupt $+ a . + b = + a b$ sei; sondern auch, daß z. B. $+ 2 . - 3$ (das ist $- 3$ zweimal genommen) $= - 6$ sei: nunmehr aber wird es nöthig sein, uns algemein von folgendem Lehrsaze zu überzeugen.

§. 240.

Lehrsaz.

I. Zwei Faktoren von verschiedenen Zeichen geben ein negatives

II. Zwei

II. Zwei Faktoren von einerlei Zeichen ein positives Produkt.

§. 241.

Lehrsaz.

Daß zwei positive Faktoren ein positives Produkt geben, ist durch sich selbst klar. Dies vorausgesezt, mus

1) da $6 - 4 = 2$, nothwendig

$3(6 - 4) = 6$, oder unverwikkelt multiplicirt, 18 und $+ 3 . - 4$ zusammengenommen $= 6$ sein. Wenn aber dies sein sol; so mus nothwendig $+ 3 . - 4 = - 12$ sein; indem keine andere Zahl außer $- 12$ mit 18 zusammengenommen 6 giebt.

2) Wolte man ferner gerne das Resultat haben, daß $- 3 . + 4 = - 12$ sei; so kan man folgendermaßen schließen: Es mus sein $+ 4 . (+ 6 - 3) = + 12$, oder $+ 24$ und $4 . - 3 = 12$; also mus $4 . - 3 = - 12$ sein; indem keine andre Zahl, außer $- 12$, mit $+ 24$ zusammengenommen $+ 12$ giebt. $+ 4 . - 3$ ist aber nun offenbar einerlei mit $- 3 . + 4$. Aus 1) und 2) ergiebt sich also, daß sowohl $+ 3 . - 4$, als $- 3 . + 4$, $- 12$ giebt, und hiemit ist der erste Theil des Lehrsazes erwiesen, daß nämlich eine positive Zahl durch eine negative, oder eine negative Zahl durch eine positive multiplicirt ein negatives Produkt giebt.

Durch Hülfe dieses Sazes wird es nun leicht sein, auch den zweiten Theil des Lehrsazes zu erweisen,

sen, daß nämlich nicht nur 3) zwei positive Faktoren, welches von selbst klar ist; sondern 4) auch zwei negative Faktoren ein positives Produkt geben.

Es ist + 6 — 2 = + 4. Da nun, wie eben erwiesen worden, — 3. + 4 = — 12; so mus auch — 3. (+ 6 — 2) = — 12 oder unverwikkelt multiplicirt, — 18 mit — 3. — 2 zusammengenommen = — 12 sein; welches nicht wahr sein kan, wenn nicht — 2. — 3 = + 6 ist; indem keine andre Zahl außer + 6 mit — 18 zusammengenommen — 12 geben kan.

§. 242.

Aus diesem Lehrsaze können nun auch die nöthigen Regeln für die Division der positiven und negativen Größen gar leichte gefolgert werden, wenn man nur voraussezt, daß eben so, wie bei der gewöhnlichen Division, wobei man blos auf die absolute Größe der Zahlen siehet, die Division der Multiplikation geradezu entgegengesezt ist, so daß $\frac{2.3}{3} = 2$ ist, und überhaupt eine jede Zahl unverändert herauskömt, nachdem sie durch einerlei Zahl multiplicirt und dividirt ist; eben so auch die algebraische Division, wobei auch die Beschaffenheiten der Größen, die Zeichen + und — in Betrachtung kommen, der algebraischen Multiplikation geradezu entgegengesezt ist, so daß, wenn eine Grösse A durch eine andre B multiplicirt, und dies Produkt durch dieselbe B dividirt ist, der entstandene

dene Quotient sowohl seiner Grösse als Beschaffenheit nach der A volkommen gleich sein mus, wie auch diese Zahlen immer beschaffen sein mögen.

§. 243.

Lehrsaz.

I) Zwei Zahlen mit gleichen Zeichen in einander dividirt, geben einen positiven; II) zwei Zahlen mit ungleichen Zeichen in einander dividirt, einen negativen Quotient.

§. 244.

Beweis.

Wenn, wie eben erwiesen worden,

1) $+3 \cdot -4 = -12$ ist, so mus auch (§. 55.) $\frac{+3 \cdot -4}{-4} = \frac{-12}{-4}$ sein. Da nun nach (§. 242.) $\frac{+3 \cdot -4}{-4} = +3$ sein mus; so mus (§. 43.) $\frac{-12}{-4} = +3$ sein.

Da es 2) durch sich selbst klar ist, daß $\frac{+12}{+4} = +3$; so ist hiemit der erste Theil des Lehrsazes erwiesen.

Von

Von den beiden Fällen des 2ten Theiles können wir uns auf folgende Weise überzeugen.

3) Da (§. 240.) $-8 \cdot -4 = +32$; so mus auch (§. 55.) $\frac{-8 \cdot -4}{-4} = \frac{+32}{-4}$ sein; folglich

da (§. 242.) $\frac{-8 \cdot -4}{-4} = -8$ ist,

auch (§. 45) $\frac{+32}{-4} = -8$ sein.

4) Da ferner $+8 \cdot -3 = -24$; so mus (§. 55.) $\frac{+8 \cdot -3}{+8} = \frac{-24}{+8}$, folglich,

da (§. 242.) $\frac{+8 \cdot -3}{+8} = -3$

auch $\frac{-24}{+8} = -3$ sein.

§. 245.

Es ist demnach $a \cdot -b = -ab$, $-a \cdot +b = -ab$, $-a \cdot -b = ab$, und $-1 \cdot +a = -a$, $-1 \cdot +1 = -1$, $-1 \cdot -1 = 1$.

$\frac{-1}{-1} = 1$, $\frac{+1}{-1} = -1$, $\frac{+a}{-a} = \frac{-a}{+a} = -1$,

$\frac{+p}{-q} = -\frac{p}{+q}$, $\frac{-fg}{-m} = +\frac{fg}{m} = \frac{+fg}{+m}$. Umgekehrt kan man stat $-\frac{p}{q}$ schreiben $\frac{+p}{-q}$ oder auch $\frac{-p}{+q}$, je nachdem es jedesmal am bequemsten ist.

§. 246.

§. 246.

In $-(a+b-f)$ und jedem ähnlichen Ausdrukke, zeigt das Zeichen $-$ vor der Parenthese an, daß die ganze eingeschlossene Reihe von einer andern abgezogen werden sol. Folglich mus das Zeichen eines jeden Gliedes in das entgegengesezte verwandelt werden, wenn man die Parenthese wegschaffen wil, und es ist $-(a+b-f) = -a-b+f$; da nun nach §. 245. auch $-1(-a+b-f)$, wenn man unverwikkelt multiplicirt, $a-b+f$ geben mus, so kan man sich auch allemal vorstellen, daß z. B. $-(q-x-y)$ so viel sei, als $-1.(q-x-y)$ so wie $+(q-x-y) = +1.(q-x-y)$ ist. Diese Vorstellung sichert uns vor allen Fehlern beim Gebrauch der Parenthesen, wenn wir nur noch merken, daß das Zeichen $+$ vor dem ersten Gliede einer Parenthese eben so, wie vor dem ersten Gliede in der Seite einer Gleichung, nicht ausdrücklich geschrieben und also allemal verstanden wird, wenn das erste Glied gar kein Zeichen hat. Wolte man daher folgende Reihe $-m+fg-r$, nur irgend einer Bequemlichkeit wegen in eine Parenthese sezen, ohne die Veränderung der Zeichen zur Absicht zu haben; so müste die Klammer vor dem $-$ Zeichen auf folgende Weise $(-m+fg-r)$, nicht aber hinter dasselbe, wie in $-(m+fg-r)$ geschrieben werden; indem dieser lezte Ausdruk $= -m-fg+r$ sein würde.

§. 247.

§. 247.

In solchen Zahlen, welche in Gestalt der Brüche geschrieben sind, vertrit der Querstrich, welcher die Division anzeigt, die Stelle der Parenthesen. Es ist demnach

$$-\frac{p-q+r}{-n+f-g} = (\S.243.)\ \frac{-(p-q+r)}{+(-n+f-g)}$$

$$= \frac{-1(p-q+r)}{+1(-n+f-g} = \frac{-p+q-r}{-n+f-g}$$

oder auch $-\frac{p-q+r}{-n+f-g} = (\S.243.)\ \frac{+(p-q+r)}{-(-n+f-g)}$

$$= \frac{+1.(p-q+r)}{-1.(-n+f-g)} = \frac{p-q+r}{n-f+g}$$

§. 248.

LVII. Aufgabe.

Zwei Faktoren von mehren Gliedern, als $(a-3f+p^2).(2a+3f-g-mn)$ unverwikkelt in einander zu multipliciren.

§. 249. Auflösung.

Man schreibe den einen Faktor unter dem andern auf folgende Weise

$2a+3f-g-mn$

$a-3f+p^2$ und multiplicire jedes Glied der obern Reihe

durch a; $2a+3af-ag-amn$,

durch $-3f$: $-6af-9f^2+3fg+3mnf$

durch p^2 $+2ap^2+3fp^2-gp^2-mnp^2$

Die Summe aller dieser Glieder ist das verlangte Produkt, welches man so kurz als möglich zu schreiben sucht. Es lassen sich indessen hier nur zwei Glieder, nämlich $+3af - 6af$ in eines $-3af$ zusammenziehen. Von der Richtigkeit dieses Verfahrens können wir uns auf folgende Weise überzeugen.

§. 250.

Beweis.

Es mus gewis $a.(2a+3f-g-mn) -3f.(2a+3f-g-mn)+p^2.(2a+3f-g-m) = (a-3f+p^2).(2a+3f-g-mn)$ sein: denn die Glieder eines jeden Faktors sind so viel Theile, in welche der ganze Faktor zerlegt ist. Wenn ich aber eine Zahl B z. B. in 3 Theile zerlege, und durch jeden dieser Theile eine andre Zahl A (welche wiederum in mehrere Glieder zertheilt sein kan) multiplicire, so mus die Summe dieser drei Produkte nothwendig dem Produkte A . B gleich sein.

§. 251.

So wird also auch in

$$\begin{array}{rl} & a+b \\ & a-b \\ \hline a(a+b) = & a^2+ab \\ -b(a+b) = & \quad\;\; -ab-b^2 \\ \hline \end{array}$$

, daher die Summe $a^2-b^2 = (a+b).(a-b)$ gefunden werden.

Zehntes Kapitel.

Von den Quadratzahlen und Quadratwurzeln.

§. 252.

LVIII. Aufgabe.

Das Binomium, (die zweinamige, zweigliedrige, zweitheilige Größe) $a + b$ zu quadriren.

§. 253.

Auflösung.

Das Quadrat von $a + b$, oder $(a + b)^2$ ist (nach §. 160) $= (a + b) . (a + b)$ diese beide Faktoren unverwikkelt multiplicirt

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ + ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

geben $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

§. 254.

Eben so wird

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \qquad \\ - ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

gefunden $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

§. 255.

Hieraus ersieht man, daß ein Binomial-Quadrat, d. i. das Quadrat einer zweinamigen (zweitheiligen) Wurzel enthält

1) a^2, das Quadrat des ersten Wurzeltheiles,
2) $2ab$, das doppelte Produkt aus beiden Wurzeltheilen,
3) b^2, das Quadrat des lezten Wurzeltheiles.

§. 256.

Man kan diesen Saz durch eine geometrische Figur sehr gut erläutern. In dem Quadrate Fig. 10. stelle die Seite AC eine zweigliedrige Größe $a + b$ vor, so mus das ganze Quadrat AC^2 $(= (a + b)^2)$ enthalten $a^2 + ab + ab + b^2$; welches, wie beim ersten Anblik der Figur in die Augen fält, volkommen zutrift.

§. 257.

Um auch folgenden Saz, daß $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, auf ähnliche Art zu erläutern; so seze man (Fig. 11.) $AC = a$, $BC = b$, so wird $AB = a - b$, und das Quadrat $ABHJ = (a - b)^2$.

Nun ist $(a - b)^2 \;=\; a^2 - ab \;(- ab + b^2)$
|| || || ||
und $AHIB = AGEC - HGED - BIDC$.

Daß die durch die drei ersten vertikal gesezten Gleichungszeichen (||) behaupteten Vergleichungen richtig sind, fält von selbst in die Augen. Wir

werden

werden aber ohne Schwierigkeit einsehen, daß auch die lezte Vergleichung, nämlich $(-ab+b^2) = BIDC$ allerdings richtig ist. Denn

da $ab = BFEC$, das
ist $ab = BIDC + IFED$; so ist auch
$-ab = -BIDC - IFED$, folglich
da $+b^2 = +IFED$

auch $-ab+b^2 = -BIDC$.

§. 258.

Nach diesem Ausdrukke $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kan man eine jede Zahl quadriren, indem man dieselbe in zwei andere bequeme Zahlen zertheilt, welches nicht nur öfters viel bequemer als die ordentliche Multiplikation ist; sondern auch auf die gewöhnliche Ausziehungsart der Quadratwurzel führt. Um z. B. die Quadratzahl von 13 zu finden, theile man diese Zahl in $10 + 3$, so daß $a = 10$, $b = 3$, so erhält man $(10+3)^2 = 100 + 60 + 9 = 169$. Eben so ist $15^2 = (10+5)^2 = 100 + 2.50 + 25 = 225$ und $17^2 = (12+5)^2 = 144 + 120 + 25 = 289$.

In andern Fällen rechnet man bequemer nach $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, und findet z. B. $(79)^2 = (80-1)^2 = 6400 - 160 + 1 = 6561$.

§. 259.

Auch das Quadrat einer Reihe von mehr als zweien Gliedern z. B. $(a+b+c)^2$ wird ohne Schwierigkeit gefunden, indem man eine solche

Zahl nach der §. 249 gezeigten Art durch sich selbst multiplicirt, und man findet auf diese Weise

$$
\begin{array}{l}
a + b + c \\
a + b + c \\
\hline
a^2 + ab + ac \\
\quad + ba + b^2 + bc \\
\qquad + ac + bc + c^2 \text{ das Produkt} \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = (a+b+c)^2.
\end{array}
$$

§. 260.

Indessen wird man auf eine weit leichtere Weise das Quadrat einer mehrgliedrigen Zahl angeben können, wenn man eine solche Zahl nach und nach als eine zweigliedrige Zahl betrachtet, und nach den §. 255 gegebnen Regeln quadrirt.

Wir wollen dies Verfahren sogleich an der viergliedrigen Reihe $a + b + c + d$ lernen. Man quadrirt nämlich zuförderst die beiden ersten Glieder $a + b$, und nach §. 255 ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Geht man nun zum dritten Gliede c fort, und betrachtet dies Glied c als den 2ten Theil, und die beiden ersten Glieder $(a + b)$ zusammengenommen als den ersten Theil einer zweinamigen Wurzel; so mus in dem Binomialquadrate $((a + b) + c)^2$ enthalten sein: 1) das Quadrat des ersten Theiles $(a + b)^2$ welches nun schon geschrieben steht; 2) das doppelte Produkt aus beiden Theilen $2c(a + b)$ oder $2ac + 2bc$; 3) das Quadrat des lezten Theiles, c^2. Demnach ist $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

Be-

Betrachtet man nun ferner die drei ersten Glieder $(a + b + c)$ zusammengenommen als einen ersten, und das vierte Glied d als den zweiten Wurzeltheil; so mus $((a + b + c) + d)^2$ enthalten 1) das Quadrat des ersten Wurzeltheiles, $(a + b + c)^2$, welches schon ausgeschrieben ist; 2) das doppelte Produkt aus beiden Wurzeltheilen $2d(a + b + c) = 2ad + 2bd + 2cd$; 3) das Quadrat des lezten Theiles, d^2, und es ergiebt sich also aus diesen drei Theilen zusammengenommen $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$

§. 261.

Das Quadrat einer jeden bestimten Zahl läst sich, wie schon gesagt ist, allemal finden, indem man eine solche Zahl durch sich selbst multiplicirt. So findet man z. B.

$$\begin{array}{r} 435 \\ 435 \\ \hline 2175 \\ 1305 \\ 1740 \\ \hline \end{array}$$

das Produkt $189225 = (435)^2$. Weit schwieriger ist es aber umgekehrt aus einer gegebnen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen, das ist, diejenige Zahl zu finden, welche mit sich selbst multiplicirt die gegebne Zahl herausbringt. Folgende Betrachtungen werden uns indessen die Mittel an die Hand

 geben,

geben, wodurch man allemal mit der möglichsten Volkommenheit eine solche Wurzel entwikkeln kan.

§. 262.

Gesezt es sei die Zahl 189225 gegeben, aus welcher die Quadratwurzel zu ziehen ist. Man theile zuförderst die gegebne Zahl in Klassen zu zwei und zwei Decimalstellen 18|92|25 dergestalt, daß die Einer und Zehner die erste, die Hunderte und Tausende die zweite, u. s. w. allemal zwei Decimalstellen eine Klasse ausmachen, und also für die lezte höchste Klasse nur Eine Zahl übrig bleibt, wenn die Anzahl der Decimalstellen ungerade ist: so ist nun dies gewis, daß die Wurzel dieser Zahl gerade so viele Decimalstellen haben mus, als diese Zahl Klassen hat. Denn die höchste Zahl von Einer Decimalstelle, die Zahl 9 giebt quadrirt 81, eine Zahl von Einer Klasse; und schon die geringste Zahl von 2 Klassen, welches die Zahl 100 ist, hat eine Zahl von 2 Decimalstellen, nämlich 10 zur Wurzel. Ferner giebt 99, die höchste Zahl von 2 Decimalstellen, quadrirt 98|01|, eine Zahl von 2 Klassen, und die kleinste Zahl von drei Klassen, nämlich 1|00|00| hat schon eine Zahl von 3 Decimalstellen, nämlich 100 zur Wurzel, ꝛc.

§. 263.

Die Wurzel unserer Zahl 18|92|25| besteht demnach aus drei Decimalstellen, also aus Einern, Zehnern

Zehnern und Hunderten. Man seze die Zahl der Hunderte, welche in der Wurzel sein mus = h, die Zahl der Zehner = z, und die Zahl Einer = e, dergestalt, daß h + z + e unsere verlangte noch unbekante Wurzel ausdrükt, und also

$h + z + e = \sqrt{189225}$ ist; so mus auch (§. 161.) $(h + z + e)^2 = 189225$ sein.

Wird nun diese dreigliedrige Zahl, h + z + e, nach (§. 259.) wirklich quadrirt; so erhält man

$$h^2 + 2hz + z^2 + 2he + 2ze + e^2 = 189225,$$

oder (*) $h^2 + 2hz + z^2 + 2(h+z)e + e^2 = 189225.$

Da ein jedes Produkt aus 2 reinen Hundertzahlen, das ist, solchen Hundertzahlen, welche keine Zehner und Einer bei sich haben, z. B. von 400.400 das Produkt 160000, oder von 300.300 das Produkt 90000 unmöglich Einer, Zehner, Hunderte oder Tausende enthalten kan, folglich allemal vier 0000 in den vier ersten Decimalstellen haben mus; so wird, was auch die Hundertzahl h für eine Zahl von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bedeuten mag, doch das Produkt h h in den lezten vier Decimalstellen 0000 haben.

Es kan also keine Zahl von h, dem Quadrate des ersten Wurzeltheiles niedriger, als in den Zahlen der 3ten Klasse 18|..|.. enthalten sein,

(*) Indem die beiden gemeinschaftlichen Faktoren herausgezogen, und stat 2 h e + 2 z e geschrieben werden kan 2 e (h + z) oder auch 2 (h + z) e.

sein, und um diesen ersten Wurzeltheil h zu entdekken, darf man nur von den

Quadraten 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81
der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

das gröste Quadrat aufsuchen, welches nur noch in 18 enthalten sein kan. Dies ist in unserm Falle die Quadratzahl 16, und wir sind nunmehr gewis, daß $h^2 = 160000$ folglich $h = 400$ ist. Wenn wir nun

von 18	92	25	h, 4 . .	abzie-
hen $h^2 = 16$	. .	. . so bleibt noch		
übrig 2	92	25 $= 2hz + z^2 + 2(h+z)e + e^2$		

In diesem Reste ist also außer andern Produkten auch das Produkt $2hz$ enthalten, welches als ein Produkt aus einer reinen Hundertzahl und einem Zehner nothwendig in den 3 ersten Decimalstellen 000 haben mus; so daß keine wirkliche Zahl dieses Produktes in keiner niedrigern Decimalstelle, als in der vierten stehen kan, und also alle Zahlen desselben in den Zahlen 2|9 . | . . enthalten sein müssen. Von diesem Produkte $2hz$ ist mir nun schon h bekant, welches $= 4$ ist, so daß ich die z finden kan, indem ich versuche, wie oft $2h$, das ist, $2 . 4$, das ist 8, in 29 enthalten ist, nämlich 3 mal. Hiedurch bin ich versichert, daß die Zahl z nicht größer als 3 sein kan, und wirklich $= 3$ sein mus; wenn, nachdem ich

von 2 | 92 | 25 | h, z. 4 3.

$2hz = 2$ | 4. | .. abgezogen habe, von dem

Reste 52 | 25 $= z^2 + 2(h+z)e + e^2$, auch noch

(**) $z^2 = 9$ | 25 abgezogen werden kan.(***) Nun

bleibt noch 43 | 25 $= 2(h+z)e + e^2$,

In diesem Reste ist also noch $2(h+z)e$, enthalten, welches als ein Produkt, dessen einer Faktor aus Hunderten und Zehnern besteht, nothwendig in der ersten Decimalstelle 0 haben mus; so daß alle wirkliche Zahlen desselben in keine niedrigere als die zweite Decimalstelle fallen können. Da nun $2(h+z)$ das ist 2 . 43 . das ist 86 . in 43|2 . aufs höchste 5 mal enthalten ist; so kan der dritte Wurzeltheil e nicht

(**) Die 9 mus nämlich unter die dritte Decimalstelle gesezt werden, weil z^2 als ein Produkt von 2 reinen Zehnern nothwendig in den beiden ersten Decimalstellen 00 haben mus.

(***) Fände sich aber nun etwan z^2 zu groß, als daß es noch abgezogen werden könte; so müßte z immer kleiner angenommen werden, bis $(2hz + z^2)$ entweder eben so groß, oder kleiner als 2|92 wird.

nicht größer als 5 sein, und er darf auch nicht kleiner als 5 genommen werden; da man, nachdem

von 43|25 | h, z, e — 4 3 5 | abgezogen

ist $2(h+z)e = 43|0.$, von dem

Reste $25 = e^2$ auch noch

$e^2 = 25$ abziehen kan.

0

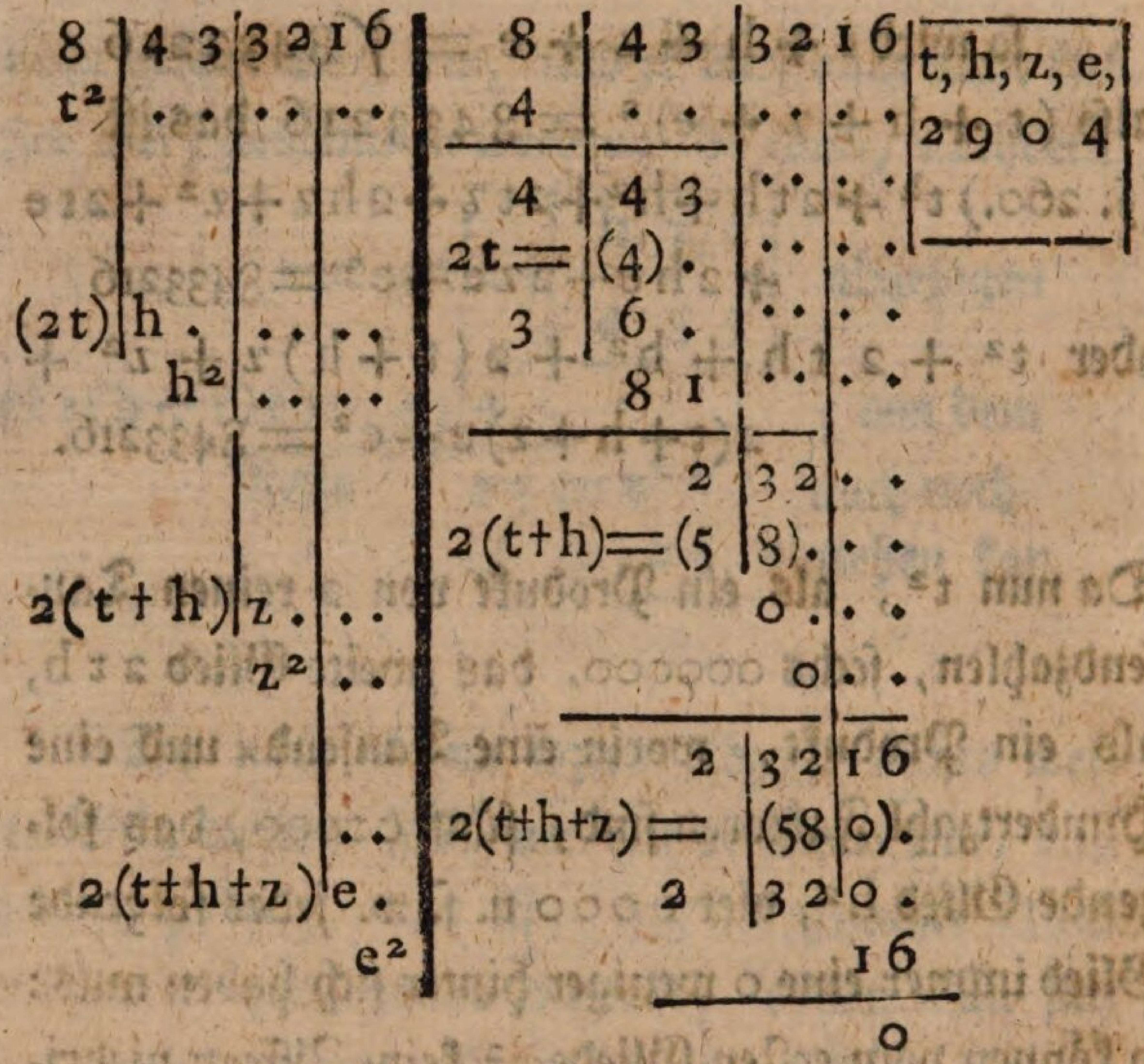
Da nach diesem lezten Abzuge nichts weiter übrig bleibt; so können wir versichert sein, daß $400 + 30 + 5$, das ist, 435 die gesuchte Quadratwurzel ganz genau angiebt; wovon man sich auch noch durch eine Probe versichern kan, indem man diese Wurzel 435 in sich selbst multiplicirt.

§. 264.

Die Wurzel von 8|43|32|16 mus 4 Decimalstellen haben, wenn ich deshalb außer den Zahlen $e + z + h$, welche die Ziffern der Einer, Zehner und Hunderte der gesuchten Wurzel wie vorhin bedeuten sollen, auch die Ziffer der Tausende, welche sie enthält, durch t bezeichne;

so wird $t + h + z + e = \sqrt{8433216}$
also $(t + h + z + e)^2 = 8433216$ das ist
(§. 260.) $t^2 + 2th + h^2 + 2tz + 2hz + z^2 + 2te + 2he + 2ze + e^2 = 8433216$
oder $t^2 + 2th + h^2 + 2(t+h)z + z^2 + 2(t+h+z)e + e^2 = 8433216$.

Da nun t^2, als ein Produkt von 2 reinen Tausendzahlen, sechs 000000, das zweite Glied 2 t h, als ein Produkt, worin eine Tausend- und eine Hundertzahl Faktoren sind, fünf 00000, das folgende Glied h^2, vier 0000 u. s. w. jedes folgende Glied immer eine 0 weniger hinter sich haben mus: so können vom ersten Gliede t^2 keine Ziffern niedriger als bis in die 7te Decimalstelle, vom 2ten Gliede 2 t h keine Ziffern niedriger, als bis in die sechste, von dem folgenden Gliede h^2 keine Ziffern niedriger als in die fünfte Decimalstelle 2c. fallen, und es können keine Zahlen dieser Glieder in niedrigern Decimalstellen der Zahl 8433216 enthalten sein, als diejenigen sind, worunter ein jedes Glied in folgendem Schema geschrieben ist:



§. 265.

Aus diesem allen ergeben sich nun für die Ausziehung einer Quadratwurzel folgende algemeine Regeln, deren Anwendung obiges Schema vor Augen stelt.

1) Man theile die gegebne Zahl in Klassen, deren erste aus den Einern und Zehnern, die zweite aus den Hunderten und Tausenden, 2c. besteht.

2) Ziehe von den

Quadraten 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

der Wurzeln 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 das möglichst gröste von den Zahlen der höchsten Klasse ab, bemerke die Wurzel dieses abgezogenen Quadrates, als den ersten Wurzeltheil, und

3)

3) schreibe neben den etwan gebliebenen Rest die Zahlen der folgenden Klasse.

4) Schreibe das Duplum des bereits angeschriebnen Wurzeltheiles in Klammern eingeschlossen dergestalt, daß die niedrigste Decimalstelle desselben unter der höchsten Decimalstelle der herabgerükten Klasse stehe.

5) Ueberschlage wie oft dieses Duplum in den darüber stehenden Zahlen enthalten sei, und schreibe den Quotienten als den zweiten Wurzeltheil an. (*)

6) Multiplicire mit dem eben angeschriebnen Wurzeltheil das in Klammern eingeschlossene Duplum, und schreibe das Produkt gerade darunter, so daß seine geringste Decimalstelle in die höchste Decimalstelle der herabgerükten Klasse trift.

7) Schreibe das Quadrat des zulezt angeschriebnen Wurzeltheiles darunter eine Decimalstelle niedriger, und

8) ziehe dies Quadrat nebst dem darüberstehenden Produkte von den darüberstehenden Zahlen dieser und denen von der höhern Klasse etwan übriggebliebenen Zahlen ab. (**)

Nun=

(*) Dieser Quotient giebt aber nach Anmerk. (***) §. 263 erst in dem Falle wirklich den neuen Wurzeltheil richtig an, wenn auch das Quadrat desselben nach No. 8 noch abgezogen werden kan: aber

(**) Solte dies Quadrat größer als der darüberstehende Rest sein; so wäre dies eine Anzeige, daß der neue Wurzeltheil zu groß angesezt wäre, und kleiner angenommen werden müste.

Nunmehro fångt man aufs neue an, nach den Regeln von 3 bis 8 so lange zu verfahren, bis man alle Klassen heruntergerükt hat. Man schreibe nämlich

3) neben den jezt etwan gebliebnen Rest die Zahlen der folgenden Klasse und

4) schreibe das Duplum des bereits angeschriebnen Wurzeltheils (welcher nun aus zwei Decimalstellen besteht) in Klammern eingeschlossen, ꝛc. (wie oben bei 4.)

§. 266.

Durch dasjenige was §. 164 von der Quadrirung einer gebrochenen Zahl gesagt ist, daß nämlich $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2}$ sei, können wir sehr leicht auf die Gedanken gerathen, daß umgekehrt die Quadratwurzel eines jeden Bruches gefunden werden müsse, indem man sowohl aus dem Zähler als Nenner die Quadratwurzel zieht, also daß $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ sei. Und wir können uns in der That von der Richtigkeit dieses Sazes auf folgende Weise algemein überzeugen.

Laßt uns schreiben 1) $\sqrt{\frac{p}{q}} \overset{?}{=} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, das ist, wir fragen, ob wohl diese Fragegleichung bejaht werden könne. Ich sage, wenn diese Gleichung

2) $\sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \overset{?}{=} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ richtig ist; so

mus

mus auch die bei 1) richtig sein (§. 162.). Die Gleichung bei 2) sagt ferner (p. 8. V.) einerlei mit folgender 3) $\sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \overset{?}{=} \frac{\sqrt{p}\sqrt{p}}{\sqrt{q}\sqrt{q}}$ und diese nach §. 159. einerlei mit 4) $\frac{p}{q} \overset{?}{=} \frac{p}{q}$; welche nun ohne alle Zweifel nach dem Grundsaze, daß jede Größe sich selbst gleich ist, bejaht werden mus, folglich mus auch die gleichbedeutende bei 3) und ferner die gleichbedeutende bei 2), folglich auch die bei 1) bejahet werden.

Demnach ist des Bruches $\frac{16}{49}$ Quadratwurzel $\frac{4}{7}$, und $\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}$, und $\sqrt{\frac{189225}{8433216}} = \frac{\sqrt{189225}}{\sqrt{8433216}} = \frac{435}{2904}$.

§. 267.

Die Zahlen 4, 9, 16, 144, 189225 heissen volkomne Quadratzahlen, weil sich ihre Wurzeln als 2, 3, 4, 12, 435, mit gröster Genauigkeit angeben lassen. Es giebt aber weit mehrere andere Zahlen, z. B. 7, 12, 113, ꝛc. für die man keine Wurzel, das ist, keine Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt eine solche Zahl genau herausbringt, angeben kan. Solche Zahlen heissen irrationale Zahlen. Daß es nun z. B. keine ganze Zahl ge-

ben kan, welche mit sich selbst multiplicirt 12 hervorbringt, ist gar leicht zu übersehen, da 3 zu klein und 4 schon zu groß ist. Solte es also ja noch eine Wurzel von 12 geben; so müste sie größer als 3 und kleiner als 4, folglich ein Bruch sein. In der That kömt das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$, nämlich $\frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$, der Zahl 12 schon ziemlich nahe, und wenn man einen Bruch annähme, der um etwas weniges kleiner als $\frac{7}{2}$ wäre, so würde dieser Bruch vielleicht ein Quadrat geben, welches nur noch ungemein wenig von 12 verschieden wäre: aber ich behaupte, daß man nie einen Bruch finden werde, welcher mit sich selbst multiplicirt ganz genau 12 giebt. Der strenge Erweis dieser Behauptung kan nur aus gewissen Eigenschaften unserer Decimalzahlen hergeleitet werden, deren Kentnis wir hier noch nicht voraussezen wollen. Nöthig aber ist es, ein algemeines Mittel kennen zu lernen, wodurch man die Wurzeln solcher Irrationalzahlen mit der jedesmal nöthigen Genauigkeit finden kan.

§. 268.

Dies geschieht am bequemsten, wenn man eine solche Irrationalzahl in Hundert- Zehntausend- Millionen-Theilchen, ꝛc. verwandelt. So ist z. B. $12 = \frac{1200}{100}$, folglich auch $\sqrt{12} = \frac{\sqrt{1200}}{\sqrt{100}}$. Fängt

man

man nun an, die Wurzel aus 1200 zu ziehen; so findet

```
 12 | 00 | 34
  9 | ·· |
---------
  3 | 00
     (6)
  2   56 (*)
-------------
      44
```

man 34 freilich nur als eine unvolkomne Wurzel von 1200, indem 34 . 34 nur 1156 und nicht 1200 giebt. Wenn wir aber diesen Fehler nicht achten, und 34 als die Wurzel von 1200 annehmen wollen; so können wir schließen, da $\sqrt{12} = \frac{\sqrt{1200}}{\sqrt{100}}$ ist, daß $\sqrt{12} = \frac{34}{10} = 3,4$ sein müsse. Der Fehler, welcher hiebei begangen wird, kan kein ganzes Zehntel mehr betragen, weil man sonst $\sqrt{1200} = 35$ würde gefunden haben. Um aber auch die zur volkomnern Wurzel noch fehlenden Hundert- und Tausend- und Zehntausendtheilchen zu finden; so darf man nur nehmen $\sqrt{12} = \frac{\sqrt{1200000000}}{\sqrt{100000000}}$ und die obige Wurzelausziehung weiter fortsezen, indem

(*) 256 ist nämlich die Summe von 24 . (=(6.)4) und 16 (=4^2) indem es bequemer ist, diese Summe mit einemmal abzuziehen, als wenn man erst das Produkt 24. und darauf von dem bleibenden Reste das Quadrat 16. abzieht.

man nach und nach noch 3 Klassen von 00 neben den gebliebenen Rest schreibt. Dadurch findet man

```
12|00|00|00|00|34641
  44.|0.0
  (6 |8)
  41  16
  ----------
     28.4.|0.0
     (69 |2)
     27696
     -----------
        704.|0.0
       (692 |8)
        69281
        ----------
     .   1119
```

34641 als eine ziemlich genaue Wurzel von 1200000000. Läßt man den dabei noch begangenen Fehler aus der Acht und nimt an, daß $34641 = \sqrt{1200000000}$ sei; so wird $\sqrt{12}\left(=\frac{\sqrt{1200000000}}{\sqrt{100000000}}\right) = \frac{34641}{10000} = 3,4641$ sein, so daß nun bei dieser Wurzel nicht mehr um ein Zehntausendtheilchen der Einheit in 12 gefehlt wird, und $(3,4641)^2$ giebt 11,99998881, welche Zahl nur um 0,00001119 kleiner, als 12 ist.

§. 269.

Daß man eine Irrationalzahl nie in $\frac{1}{10}$tel, oder $\frac{1}{1000}$tel, oder $\frac{1}{100000}$, sondern immer in solchen Decimalbrüchen ausdrükt, deren Nenner eine-

eine gerade Anzahl von 0 haben; das geschieht offenbar deshalb, weil nur diese leztern eine volkommene rationale Wurzel haben, die erstern aber, 10, 1000, 10000, ꝛc. selbst irrationale Zahlen sind. Deshalb würde man auch, wenn z. B. aus 3,5 das ist, aus $\frac{35}{10}$, die Wurzel zu suchen wäre, nicht sezen $\sqrt{\frac{35}{10}} = \frac{\sqrt{3500}}{\sqrt{1000}}$, sondern vielmehr $\sqrt{\frac{35}{10}} = \frac{\sqrt{35000}}{\sqrt{10000}}$, oder wenn dis noch nicht genau genug befunden würde, $\sqrt{\frac{35}{10}} = \frac{\sqrt{3500000}}{\sqrt{1000000}}$ sezen, u. s. w.

§. 270.

Ob man nun gleich auf diese Weise die Wurzeln aller irrationalen Zahlen immer genauer und genauer finden, und den Fehler kleiner als jede gegebne Grösse machen kan; so wird man doch, so weit man auch die Annäherung fortsezen mag, für eine ganze Zahl niemals eine rationelle Wurzel in Decimalbrüchen, das ist, einen solchen Decimalbruch finden, dessen Quadrat der gegebnen ganzen Irrationalzahl volkommen gleich wäre. Von der Wahrheit dieser Behauptung, welche nur ein einzelner Fal der algemeinen §. 260. gethanen Behauptung ist, können wir uns auf folgende Weise überzeugen. Ich sage nämlich: sobald in einer Wurzel Zehntel enthalten sind, so kan das Quadrat derselbe nicht einmal ohne Hundertel ausgedrukt werden. Denn

wenn wir uns eine Wurzel gedenken, welche ausser der Ziffer in der Einheitsstelle, welche e heissen sol, auch noch in der Zehntelstelle eine Ziffer z hat, wo also sowohl e, als z eine jede Ziffer von 1, 2, 3, ... 8, 9 bedeuten kan; so wird $(e + z)^2 = e^2 + 2ez + z^2$ sein. In dieser Reihe wird nun e^2, eine ganze Zahl sein, $2ez$ aus Zehnteln, und z^2 als ein Produkt aus zwei Zehnteln, aus Hunderteln bestehen. Da nun z aufs höchste 9 sein kan; so wird in $\frac{z^2}{100}$ der Zähler allemal kleiner als der Nenner sein, und folglich dieser Bruch für sich allein genommen nie einer ganzen Zahl gleich werden. Da aber ferner kein Quadrat der einfachen Zahlen 1, 2, 3, ... 8, 9, welche z bedeuten kan, in seiner ersten Decimalstelle 0 hat; so kan auch in dem Bruche $\frac{z^2}{100}$ nie der Zähler eben so wohl, als der Nenner, ohne Rest durch 10 dividirt, folglich dieser Bruch nie zu Zehnteln gemacht werden, welche sonst etwa mit den Zehnteln $2ez$ zusammengenommen eine ganze Zahl geben könten.

§. 271.

Eine Proportion, deren mitlere Glieder einander gleich sind, wie $p:q = q:r$, oder $1:a = a:a^2$, heist eine stätige Proportion (proportio continua) und q heist die **mitlere Proportionalzahl** zwischen p und r, a die **mitlere Proportionalzahl** zwischen 1 und a^2.

§. 272.

Wenn nun s die mitlere Proportionalzahl zwischen g und h, also $g:s = s:k$ ist, so ist (§. 180.) $s^2 = gh$, folglich (§. 162.) $s = \sqrt{gh}$, also ist die mitlere Proportionalzahl allemal gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der beiden äussern Glieder.

Umgekehrt kan ich daher die Gleichung $s = \sqrt{gh}$ in folgende Proportionen

$$g:s = s:h$$

oder $1:s = s:gh$ auflösen, welches für Anfänger noch deutlicher wird, wenn man auf folgende Weise schließet. Wenn $s = \sqrt{gh}$ sein sol; so mus auch (§. 161.) $s^2 = gh$ folglich (§. 190.) $g:s = s:h$ sein.

Eben so mus, wenn $b = \sqrt{a}$ folglich $b^2 = a$, oder $bb = 1.a$ ist, auch $1:b = b:a$, oder $1:\sqrt{a} = \sqrt{a}:a$, also die Quadratwurzel einer jeden Zahl die mitlere Proportionalzahl zwischen der Einheit und dieser Zahl sein.

§. 273.

LIX. Aufgabe.

Die Seite eines Quadrats zu finden, welches einem gegebnen Parallelogramme dem Flächenraume nach gleich ist.

§. 274.

Auflösung.

Die Zahl, durch welche nach irgend einem angenommenen Maße die Grundlinie des Parallelogram-

lelogrammes AB ausgedrükt werden kan, sei b, die Zahl durch welche alsdan die Höhe desselben, DH ausgedrükt wird, sei h, und die Zahl der Maße in der gesuchten Seite DQ des verlangten Quadrats sei x; so mus (Num. 30.) $xx = bh$, daher $x = \sqrt{bh}$ sein.

§. 275.

Gesezt nun es wäre $b = 9$, $h = 4$, so wird gefunden $x = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$; und ein Quadrat, dessen Seite = 6″, enthält allerdings eben sowohl 36□″, als ein Parallelogram, dessen Grundlinie 9″ und Höhe 4″ ist.

Würde aber bei Messung der Linie AB und DH gefunden $b = 4''$, $h = 3''$; so würde $x = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$, folglich x eine irrationelle Wurzel (Wurzel einer unvolkomnen Quadratzahl 12) nur beiläufig = 3,4 ꝛc. etwas genauer = 3,46 ꝛc. noch genauer = 3,464 ꝛc. aber niemals ganz genau gefunden werden; ob gleich bei diesem lezten Werthe x = 3,464 ꝛc. um kein ganzes Tausendtel der Einheit mehr gefehlt wird. Wenn daher die Einheit in 12 ein Zol wäre; so würde der begangne Fehler kein Zehntel einer Linie mehr betragen, sondern nur noch ein oder mehrere Hundertheilchen einer Linie ausmachen, welches so unbeträchtliche Größen sind, daß sie nur von sehr guten Augen noch bemerkt und abgemessen werden könten.

§. 276.

Geometrische Konstruktion.

Wenn $xx = bh$ genommen wird; so wird
$b : x = x : h$, folglich
auch AB : DQ = DQ : DH sein, weil ganz nothwendig die AB eben so in der DQ enthalten sein mus, wie b, die Zahl der Maße von AB in x, der Zahl der Maße von DQ, das ist, AB : DQ = b : x, und eben so auch DQ : DH = x : h sein mus. DQ, die gesuchte Seite des Quadrats, wird daher als die mitlere Proportionallinie zwischen AB und DH (Num. 42.) gefunden; indem Fig. 12 AH = AB + DH, der Radius des beschriebnen Cirkels CA = (AB + DH) : 2 genommen, und aus D die Normale DQ aufgerichtet wird.

§. 277.

Wird nun AB = 9″ DH = 4″ genommen, so wird auf diese Weise nothwendig DQ = 6″ ganz genau gefunden werden. Es wird aber auch diese gefundene mitlere Proportionale DQ allemal ganz genau von dem Cirkelkraise in Q abgeschnitten werden, von welcher Größe man auch die AB und DH annehmen mag. Wenn wir nun z. B. die AB = 4″ die DH = 3″; so wird auch in diesem Falle die mitlere Proportionale DQ ganz genau abgeschnitten und von ganz bestimter Größe gefunden

 werden.

werden. Würde man indessen diese DQ mit dem Cirkel fassen, und nach demselben Decimalmaße, wonach die AB 4″ und die DH 3″ hält, auch diese DQ messen; so würden zwar ganz gewöhnliche Augen angeben, daß diese DQ genau 3,46″ enthalte, aber bessere Augen würden entdekken, daß diese DQ außerdem noch 0,004″ enthielte, und nur wegen der Schwäche des menschlichen Gesichts, welches die nunmehr noch fehlenden $\frac{1''}{10000}$ und $\frac{1''}{100000}$ Theilchen nicht mehr unterscheiden kan, können wir es nicht entdekken, daß weder durch 3,464″ noch durch 3,4641″ und überhaupt durch keine noch so kleine Decimaltheilchen irgend eines Maßes die DQ gemessen werden könne. Denn ob uns gleich unsre Sinne hier verlassen; so wissen wir es doch schon durch richtige Schlüsse unsers Verstandes (§. 270.) daß die Wurzel der Zahl 12, ob diese Wurzel gleich nothwendig eine bestimte Größe haben mus, doch durch keine Decimalbrüche niemals genau angegeben, folglich auch keine mitlere Proportionallinie zwischen zwei Linien, deren eine nach irgend einem Maße 1 Theil und die andere 12 Theile enthält, durch noch so kleine Decimaltheile dieses Maßes niemals genau ausgemessen werden kan.

Eilftes Kapitel.

Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen.

§. 278.

Eine Gleichung, welche zulezt auf die Form $x^2 = S$ gebracht werden kan, wo die Seite S aus einem oder mehren Gliedern bestehet, in welchen aber kein x enthalten sein mus, heist eine reine quadratische Gleichung, aus welcher allemal (§. 162.) $x = \sqrt{S}$ gefunden wird. Z. B.

in $x^2 = a - \frac{m}{n} + pq$ ist $x = \sqrt{(a - \frac{m}{n} + pq)}$

in $x^2 = 36 + 4a$ ist $x = \sqrt{(36 + 4a)}$.

§. 279.

Man mus nämlich alle Glieder, welche sich unter dem Wurzelzeichen befinden, sobald sie in bestimten Zahlen angegeben sind, zusammen addiren, und darauf aus dieser Summe, nicht aber etwan aus den einzelnen Gliedern nach und nach, die Quadratwurzel ziehen. Z. B. wenn $x^2 = 16 + 9$; so ist $x = \sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{25} = 5$; aber es ist nicht $x = \sqrt{16} + \sqrt{9}$, wonach $x = 4 + 3 = 7$, also um 3 zu groß gefunden würde.

Eben so kan ohnmöglich $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)} = \sqrt{a^2}+\sqrt{2ab}+\sqrt{b^2}$ sein. Denn wenn wir schreiben

$$\sqrt{(a^2+2ab+b^2)} \overset{?}{=} \sqrt{a^2}+\sqrt{2ab}+\sqrt{b^2}$$

so ist nun $\quad \| \quad$ (§. 253.) . $\quad \|$

folglich da(*) $a+b \quad < \quad a+\sqrt{2ab}+b$

mus auch $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)} < \sqrt{a^2}+\sqrt{2ab}+\sqrt{b^2}$ sein.

§. 280.

Aber wenn S ein Produkt aus mehren Faktoren ist, so kan man gar wohl die Wurzel aus einem oder mehren einzelnen Faktoren ziehen, und als Faktoren vor der etwan noch übrigen Wurzelgröße schreiben. So ist z. B.

$$\sqrt{4.9.100} = 2\sqrt{9.100} = 2.3.\sqrt{100} = 2.3.10$$

$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$\sqrt{3600} = 60, \qquad 2.30 \qquad 6.10$$

Und daß überhaupt allemal $\sqrt{pq} = \sqrt{p}\sqrt{q}$ sei, davon können wir uns auf folgende Weise algemein überzeugen. Der uns unbekante Werth der Größe $\sqrt{p}\sqrt{q}$ mag sein, welcher er wil; so können wir doch, wenn wir diese Größe durch G bezeichnen, und also

$\sqrt{p}\sqrt{q} = G$ sezen, nach §. 161 gewis sein, daß alsdan auch $pq = G^2$ sein müsse. Wenn aber dies

(*) Wird gelesen $a+b$ kleiner ist als $a+\sqrt{2ab}+b$. So wie $p > q$ gelesen wird: p ist größer als q.

dies ist, so mus nach §. 162 auch $\sqrt{pq} = G$, folglich (§. 43.) $\sqrt{pq} = \sqrt{p}\sqrt{q}$ sein.

§. 281.

Die Schlüsse, nach welchen im vorigen §. gefolgert wurde, daß $\sqrt{pq} = \sqrt{p}\sqrt{q}$ sei, bleiben völlig richtig: wenn wir uns auch einen von diesen beiden Faktoren, oder beide als ein Produkt aus mehren Faktoren vorstellen. Folglich ist hiemit zugleich erwiesen, daß auch z. B. $\sqrt{mnrs}$ $(= \sqrt{m(nrs)}) = \sqrt{m}\sqrt{nrs} = \sqrt{mnr}\sqrt{s}$, oder auch, daß $\sqrt{mnrs}\ (= \sqrt{(mn)(rs)})$ $= \sqrt{mn}\sqrt{rs} = \sqrt{m}\sqrt{n}\sqrt{r}\sqrt{s}$. Eben so ist $\sqrt{ax^2np^2} = px\sqrt{an}$;

$$\sqrt{\frac{p^2 . an^2}{4q^2}}\ \left(= \frac{\sqrt{p^2n^2} . \sqrt{a}}{\sqrt{4q^2}}\right) = \frac{pn}{2q}\sqrt{a}.$$

§. 282.

Die Quadratwurzel von a^2 ist diejenige Zahl, welche durch sich selbst multiplicirt a^2 giebt. Nun giebt aber nicht nur $a . a = a^2$, sondern auch $-a . -a = a^2$ (§. 240.), eben so ist nicht nur $4 . 4 = 16$; sondern auch $-4 . -4 = 16$; und auf diese Art hat eine jede positive Zahl zwei Quadratwurzeln, welche absolute genommen sich gleich sind, und wovon die eine positiv, die andere negativ ist.

Wenn auch eine Zahl irrational ist; so kan dies hierin keinen Unterschied machen. Es kan

z. B.

z. B. — 3, 46, mit eben dem Rechte für die Wurzel von 12 angenommen werden, als + 3, 46; indem $-3,46 \cdot -3,46 = +(3,46 \cdot 3,46)$ und überhaupt $-\sqrt{p} \cdot -\sqrt{p} = +(\sqrt{p} \cdot \sqrt{p}) = p$ ist.

§. 283.

So wie eine positive Zahl allemal 2 Quadratwurzeln hat; so kan es im Gegentheil für eine negative Zahl gar keine Quadratwurzel geben. Denn da z. B. von — 25 die Quadratwurzel entweder + 5 oder — 5 sein müste, so giebt doch weder $+5 \cdot +5$ noch $-5 \cdot -5$ das Produkt — 25, sondern beides giebt + 25. Wer demnach eine Quadratwurzel einer negativen Zahl fordert, der fordert etwas unmögliches; denn er verlangt, genau betrachtet, daß eine Zahl in sich selbst multiplicirt, oder zwei Zahlen von einerlei Größe und einerlei Zeichen in einander multiplicirt, ein negatives Produkt geben sollen, welches wider den §. 240. erwiesenen Lehrsaz streitet. Der Ausdruk $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-1}$, bedeutet daher eine unmögliche Größe, welche niemals angegeben werden kan. Dis hindert indessen nicht, daß nicht dergleichen Ausdrükke im algebraischen Kalkul oft mit Nuzen könten gebraucht werden. Es ist. z. B. außer Zweifel, daß $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$, indem wir uns unter dem Ansdruk $\sqrt{-a}$ eine solche Größe vorstellen, welche in sich selbst multiplicirt — a giebt. Daraus

folgt

folgt ferner, daß $\sqrt{-a} = \frac{-a}{\sqrt{-a}}$ sei, und dergleichen.

§. 284.

LX. Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt 24 giebt.

§. 285.

Auflösung.

Die gesuchte Zahl sei x, so mus sein $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 24$, oder $\frac{x^2}{6} = 24$, daher $x^2 = 144$, und $x = \mp\sqrt{144} = \mp 12$ (plus oder minus 12.) Nehmen wir x = 12, so ist $\frac{12}{2} \cdot \frac{12}{3} = 6.4 = 24$, Nehmen wir x = − 12, so ist auch $\frac{-12}{2} \cdot \frac{-12}{3} = -6 \cdot -4 = 24$.

§. 286.

LXI. Aufgabe.

Es wird eine Zahl gesucht, wenn man zu ihr α) a addirt, β) von ihr a subtrahirt, daß das Produkt aus dieser Summe und Differenz = c sei.

§. 287.

Wenn x die gesuchte Zahl sein sol, so mus sie dergestalt genommen werden:

daß

daß $(x+a)(x-a)=c$ sei
d. i. $x^2 - a^2 = c$, daher
auch $x^2 = c + a^2$
und $x = \mp \sqrt{c+a^2}$

Für $c = 16$, und $a = 3$, findet man $x = \mp \sqrt{16+9} = \mp 5$ Diese Zahl kan also sowohl $+5$ als -5 sein, und es ist allerdings sowohl 1) $(5+3).(5-3)=16$, als auch 2) $(-5+3).(-5-3) = -2.-8 = 16$.

§. 288.

LXII. Aufgabe.

Etliche Kaufleute haben eingelegt, jeder 10 mal so viel Rthlr. als Personen sind, und gewinnen mit 100 Rthlr. zweimal so viel, als Personen sind: wenn man $\frac{1}{100}$ Theil des ganzen Gewinstes durch $2\frac{2}{9}$ multiplicirt, so kömt die Anzahl der Personen heraus. Wie viel Personen nehmen Theil am Handel?

§. 289.

Auflösung.

Die unbekante Anzahl der Personen sei x; so hat jeder eingelegt $10x$ Rthlr. alle x Personen haben demnach ein Kapital von $10x^2$ Rthlr. zusammengebracht.

Nun verhält sich 100 Rthlr. zu $10x^2$ Rthlr. wie der Gewinst von 100 Rthlr. nämlich $2x$ Rthlr. zu dem Gewinste von $10x^2$ Rthlr., welcher also

nach

nach $100 : 10x^2 = 2x : \frac{20x^3}{100}$

$\frac{20x^3}{100}$ oder $\frac{x^3}{5}$ beträgt, so daß

sein sol $\frac{x^3}{500} . (2 + \frac{2}{9}) = x$, also $\frac{x^2 . 20}{4500} = 1$,

$x^2 = \frac{4500}{20} = 225$, und $x = \mp\sqrt{225} = \mp 15$

Antwort. Es sind 15 Personen gewesen. Hiemit kan die Probe leicht angestelt werden, und man wird finden, daß die Zahl + 15 alles leiste, was in der Aufgabe verlangt wird. Die andere Wurzel — 15, welche hier keinen schiklichen Sin giebt, kan daher gänzlich aus der Acht gelassen werden.

§. 290.

LXIV. Aufgabe.

Zwei Zahlen zu finden, welche in einander multiplicirt das Produkt $22\frac{1}{2}$, die eine in die andere dividirt den Quotienten $2\frac{1}{2}$ geben.

§. 291.

Auflösung.

Man wird sich hier den Kalkul erleichtern, wenn man sezt $22\frac{1}{2} = p$, und $2\frac{1}{2} = q$. Sezt man nun ferner die eine gesuchte Zahl x, die andere y; so mus sein

$$\text{I) } xy = p \quad , \text{II) } \frac{x}{y} = q.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, $x = q\,y$. Schreibt man nun in die erste Gleichung statt x die gleichgültige Größe $q\,y$; so erhält man $q\,y^2 = p$, eine Gleichung, worin nur noch die eine unbekante Größe y vorhanden ist. Es folgt daraus ferner, daß $y^2 = \frac{p}{q}$ folglich $y = \mp\sqrt{\frac{p}{q}} = \mp\sqrt{(\frac{45}{2} : \frac{5}{2})}$

$$= \mp\sqrt{\frac{45 \cdot 2}{5 \cdot 2}} = \mp\sqrt{9} = \mp 3.$$

Nimt man nun $y = 3$, so wird nach der I. Gleichung $x\,y = \frac{45}{2}$, $x = \frac{45}{2 \cdot 3} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$, und es ist in der That $3 \cdot \frac{15}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$ und $\frac{15}{2} : 3 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

Nimt man aber auch $y = -3$, so wird $x = \frac{45}{-6} = -\frac{15}{2}$ und ebenfals $-3 \cdot -\frac{15}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$, und $-\frac{15}{2} : -3 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

§. 292.

LXV. Aufgabe.

Zwei reitende Boten, welche zu gleicher Zeit von Hamburg und Berlin ausgeritten sind, und deren jeder seine ganze Reise hindurch immer mit gleicher Geschwindigkeit reitet, treffen sich unterwegs in Z (Fig. 14.). 9 Stunden nach dieser Zusammenkunft kömt der Hamburger schon in Berlin, aber erst 16 Stunden nach dieser Zusammenkunft der Berliner in Hamburg an. Wie geschwind ist jeder geritten?

§. 293.

Auflösung.

Man seze, daß jeder bis zur Zeit der Zusamkunft x Stunden unterwegens gewesen sei; so ist einerlei Weg Z B von dem
Hamburger in 9, von dem Berliner in x Stunden
und ferner einerlei Weg Z H von dem
Hamburger in x, von dem Berliner in 16 Stunden
zurükgelegt; also verhält sich die Geschwindigkeit des H. zur Geschwindigkeit des B. $= x:9$ (*)
und ferner auch die Geschwindigkeit des H. zur Geschwindigkeit des B. $= 16:x$

---

folglich mus $x:9 = 16:x$
daher $x^2 = 9 \cdot 16 = 144$
und $x = 12$ sein

Da nun Berlin von Hamburg 34 Meilen entfernt ist; so hat der Hamburger in $x+9$, das ist, $12+9$, das ist in 21 Stunden 34 Meilen, folglich in Einer Stunde $\frac{34}{21}$ Meilen; der Berliner aber erst in $x+16$, das ist in 28 Stunden 34 Meilen, also in Einer Stunde nur $\frac{34}{34}$ Meilen zurükgelegt.

N 2 Zwölf=

(*) Denn wenn z. B. A eine Meile in Einer Stunde, B eine Meile in drei Stunden geht, so geht A dreimal geschwinder als B, und es verhält sich die Geschwindigkeit des A zur Geschwindigkeit des B nicht, wie 1:3, sondern umgekehrt, wie 3:1. Daher sagt man überhaupt, daß sich die Geschwindigkeiten zweier Bewegungen umgekehrt verhalten, wie die Zeiten, in welchen gleiche Räume durchlaufen werden.

Zwölftes Kapitel.

Lehrsäze der geometrischen Proportionen.

Fortsezung des sechsten Kapitels.

§. 294.

Siebenter Lehrsaz.

Wenn a : b = c : d; so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, und $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

§. 295.

Beweis.

Wenn a:b=c:d, so ist auch (sechster Lehrsaz) $\frac{a}{b} : \frac{b}{b} = \frac{c}{d} : \frac{d}{d}$, das ist $\frac{a}{b} : 1 = \frac{c}{d} : 1$, daher alternando $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = 1 : 1$; folglich mus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sein, indem nur zwei gleiche Größen in dem Verhältnisse 1:1 stehen können; daher auch das Verhältnis 1:1, oder welches einerlei ist, 4:4, 11:11, x:x das Verhältnis der Gleichheit (ratio æqualitatis) genant wird.

Eben

Eben so kan auch erwiesen werden, daß $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

§. 296.

Achter Lehrsaz.

Wenn 1) $a : b = c : d$, so ist
auch 2) $a + b : b = c + d : d$
auch 3) $a - b : b = c - d : d$
auch 4) $a + c : c = b + d : d$
auch 5) $a - c : c = b - d : d$
auch 6) $b - a : a = d - c : c$.

§. 297.

Beweis.

Alle diese Proportionen sind richtig, wenn das Produkt der äußern Glieder gleich ist dem Produkte der innern. Es ist aber z. B. in der bei 5) allerdings $(a - c)d = (b - d)c$, das ist, $ad - cd = bc - dc$; denn es ist $-cd = -cd$, und daß auch $ad = bc$, folgt aus der als richtig zum Grunde gelegten Proportion bei 1). Eben dieselbe Beweisart kan auch für eine jede von den übrigen Veränderungen angewandt werden.

§. 298.

Neunter Lehrsaz.

Wenn 1) $a : b = m : n$
und 2) $p : q = m : n$
und 3) $r : s = m : n$ so ist
auch $a + p + r : b + q + s = m : n$.

§. 299.

Beweis.

Es ist nur die Frage, ob $(a + p + r)\,n \overset{?}{=} (b + q + s)\,m$,

das ist $an + pn + rn \overset{?}{=} bm + qm + sm$; welches zu bejahen ist, da aus der Proportion bei

1) folgt, daß $an = bm$, aus der bei
2) — — $pn = qm$ — —
3) — — $rn = sm$.

§. 300.

Eben so folgt auch aus den Proportionen bei 1) 2) 3), daß

auch $a - p - r : b - q - s = m : n$
auch $a + p - r : b + q - s = m : n$.

Denn wenn 1) $an = bm$
2) $pn = qm$
3) $rn = sm$ so mus

auch $an - pn - rn = bm - qm - sm$
auch $an + pn - rn = bm + qm - sm$

sein.

§. 301.

Zehnter Lehrsaz.

Wenn 1) $a : b = c : d$
und 2) $p : q = r : s$
und 3) $g : h = i : k$; so ist

auch $apg : bqh = cri : dsk$.

§. 302.

Beweis.

?

Es mus $apg.dsk = bqh.cri$ bejaht werden. Denn da

aus 1) folgt daß $ad = bc$

aus 2) — — $ps = qr$

so mus auch $adps = bcqr$ sein (§. 54)

und da aus 3) folgt daß $rn = sm$

so mus auch $adpsrn = bcqrsm$ sein (§. 54.)

§. 303.

Die Proportion bei 4) entstand aus den 3 vorhergehenden Proportionen, indem die einzelnen gleichnamigen Glieder dieser 3 Proportionen in einander multiplicirt wurden, und man sagt alsdan, daß die Proportion bei 4) eine aus den 3 Proportionen bei 1) 2) 3) zusammengesezte Proportion sei. Eben so heist auch das Verhältnis $2.4 : 3.9$ eine aus den beiden Verhältnissen $2 : 3$ und $4 : 9$ zusammengesezte Verhältnis.

§. 304.

Eilfter Lehrsaz.

Wenn 1) $a : \beta = m : q$

2) $\beta : \gamma = r : s$

3) $\gamma : \delta = n : p$

4) $\delta : b = f : g$; so ist

auch 5) $a : b = mrnf : qspg$

§. 305.

Beweis.

Es ist $a\beta\gamma\delta : \beta\gamma\delta b = mrnf : qspg$ (eine aus denen vier bei 1) 2) 3) 4) zusammengesezte Proportion, §. 303.); folglich ist auch

(§. 93.) $\frac{a\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\delta} : \frac{\beta\gamma\delta b}{\beta\gamma\delta} = mrnf : qspg$

das ist, 5) $a : b = mrnf : qspg$.

§. 306.

Hier ist nun das Verhältnis $a : b$ aus den vier Verhältnissen $m : q$, $r : s$, $n : p$ und $f : g$ zusammengesezt, und aus der Zusammenhaltung dieser Proportion bei 5) mit denen bei 1) 2) 3) 4) läst sich gar leicht ein algemeines Mittel entdekken, wie man umgekehrt ein jedes zusammengeseztes Verhältnis in seine einzelnen Verhältnisse auflösen könne. Da z. B. in der Proportion $a : g = mr : pq$ das Verhältnis $a : g$ aus den beiden $m : p$ und $r : q$ zusammengesezt ist; so ist, wenn man δ dergestalt annimt

daß 1) $a : \delta = m : p$

und 2) $\delta : g = r : q$ wird, hiemit das Verhältnis $a : g$ aufgelöset in $a : \delta$, welches $= m : q$ und $\delta : g$, welches $= r : q$

Um sich davon zu überzeugen, daß es allemal eine solche Zahl δ gebe, welche das Verlangte leistet, so darf man nur bedenken, daß die Protion

bei 1)

bei 1) richtig ist; wenn genommen wird $\delta = \frac{ap}{m}$ (*)

und die

bei 2) richtig ist; wenn genommen wird $\delta = \frac{gr}{q}$ (**)

Es mus aber nun allemal $\frac{ap}{m} = \frac{gr}{q}$ sein, indem aus der zum Grunde gelegten Proportion $a : g = mr : pq$ folgt, daß $apq = gmr$; folglich auch $\frac{apq}{qm} = \frac{gmr}{qm}$ ist, das ist $\frac{ap}{m} = \frac{gr}{q}$.

§. 307.

Eben so ist in der Proportion $a : b = mn : pqrx$ das Verhältnis $a : b$ ein aus $m : p$, $n : q$, $1 : r$ und $1 : x$ zusammengeseztes Verhältnis, welches in diese einzelne Verhältnisse aufgelöset wird, indem man β, γ, δ dergestalt annimt, daß

$$a : \beta = m : p$$
$$\beta : \gamma = n : q$$
$$\gamma : \delta = 1 : r$$
$$\delta : b = 1 : x$$ wird.

(*) Denn es ist $m : p = a : \frac{ap}{m}$, folglich auch anteponendo (§. 189.) $a : \frac{ap}{m} = m : p$.

(**) Denn es ist $q : r = g : \frac{gr}{q}$, folglich auch relegendo (§. 189.) $\frac{gr}{q} : g = r : q$.

§. 308.

Wenn ich daher hätte C : c = DP : dp, (welches z. B. nach geometrischen Beweisen richtig ist, wenn C die Zahl der Maße in einer Cirkelfläche, D die Zahl ihres Diameters, und P die Zahl ihrer Peripherie, c aber die Zahl der Maße in einer andern Cirkelfläche, d die Zahl des Diameters, und p die Zahl der Peripherie dieses Cirkels ausdrükt) und nun wüste, daß D : d = P : p wäre. (Num. 48.); so könte ich auch in der zusammengesezten Verhältnis, stat des Verhältnisses P : p das Verhältnis C : c schreiben, und würde dadurch auf den bekanten Saz kommen, daß C : c = DD : dd sei, oder daß 2 Cirkelflächen sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Diameter. Um sich hievon volkommen deutlich zu überzeugen, so löse man das Verhältnis C : c auf.

in 1) C : k = D : d

2) k : c = P : p; so ist nun offenbar, daß ich in 2) stat P : p schreiben kan, das gleiche Verhältnis D : d, wodurch ich erhalte 3) k : c = D : d, welche Proportion mit der bei 1) zusammengesezt giebt C : c = DD : dd.

§. 309.

Die Proportion a : b = c : d zusammengesezt mit a : b = c : d

giebt $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$

woraus wir den algemeinen Schlus ziehen, daß auch die Quadratzahlen von vier proportionalen Zahlen proportional sind.

§. 310.

Auch kan man erweisen, daß umgekehrt die Quadratwurzeln von proportionalen Zahlen proportional sein müssen. Ich sage z. B.

wenn $m : n = p : q$ so mus

auch $\sqrt{m} : \sqrt{n} = \sqrt{p} : \sqrt{q}$ sein.

Denn es ist $\sqrt{m} : \sqrt{n} = \sqrt{p} : \frac{\sqrt{n} . \sqrt{p}}{\sqrt{m}}$

und $\sqrt{m} : \sqrt{n} = \sqrt{p} : \frac{\sqrt{n} . \sqrt{p}}{\sqrt{m}}$

---

folglich auch (§. 301.)

$$\sqrt{m} . \sqrt{m} : \sqrt{n} . \sqrt{n} = \sqrt{p} . \sqrt{p} : \frac{\sqrt{n} . \sqrt{p}}{\sqrt{m}} . \frac{\sqrt{n} . \sqrt{p}}{\sqrt{m}}$$

das ist $m : n = p : \frac{np}{m}$

da nun $m : n = p : q$ als richtig angenommen ist, so mus $q = \frac{np}{m}$, folglich auch

$q = \frac{\sqrt{n} . \sqrt{p}}{\sqrt{m}} . \frac{\sqrt{n} . \sqrt{p}}{\sqrt{m}}$, also da $q = \sqrt{q} . \sqrt{q}$

ist, mus auch $\frac{\sqrt{n} . \sqrt{p}}{\sqrt{m}} . \frac{\sqrt{n} . \sqrt{p}}{\sqrt{m}} = \sqrt{q} . \sqrt{q}$

sein, welches ohnmöglich stat finden könte, wenn nicht $\frac{\sqrt{n} . \sqrt{p}}{\sqrt{m}} = \sqrt{q}$ wäre.

§. 311.

Auf ähnliche Weise ergiebt sich, wenn

$$a : b = c : d$$
mit $a : b = c : d$
und $a : b = c : d$ zusammengesezt wird,

daß auch $aaa : bbb = ccc : ddd$, oder indem man der Bequemlichkeit wegen a^3 stat aaa, b^3 stat bbb 2c. schreibt, daß auch $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$, welches man, da x^3 die Kubikzahl von x genant wird, ausdrükken wil, wenn man sagt, daß auch die Kubikzahlen von proportionalen Größen proportional sind.

§. 312.

Durch die §. 310. angewandte Schlusart kan auch bewiesen werden, daß

wenn $p : q = m : n$

auch $\sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}$ sein müsse;

wo der Ausdruk $\sqrt[3]{p}$ die Kubikwurzel von p anzeiget, so daß $\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[3]{p} = p$ ist.

§. 313.

Wir haben zwar bei den bisher vorgetragnen Lehren der geometrischen Proportionen die Glieder derselben nur als absolute Größen angesehen, ohne auf die entgegengesezte Beziehung zu achten, worin die positiven und negativen algebraischen Größen

stehen:

stehen: es wird aber keine Schwierigkeit machen, auch solche Proportionen, worin auf die Zeichen + und — der einzelnen Glieder Rüksicht genommen wird, richtig zu behandeln; wenn wir nur die §. 240. und §. 243. ausgeführten Lehrsäze beständig vor Augen behalten. Nach denselben mus nämlich

in $+a : +b = +c : \ldots d$, $d = \frac{+b . +c}{+a} = +\frac{bc}{a} = +d$

in $+a : -b = +c : \ldots d$, $\ldots d = \frac{-b . +c}{+a}$

$$= \frac{-bc}{+a} = -\frac{bc}{a} = -d$$

in $+a : +b = -c : \ldots d$, $\ldots d = \frac{+b . -c}{+a}$

$$= \frac{-bc}{+a} = -\frac{bc}{a} = -d$$

in $+a : -b = -c : \ldots d$, $\ldots d = \frac{-b . -c}{+a}$

$$= \frac{+bc}{+a} = +\frac{bc}{a} = +d$$

in $-a : -b = -c : \ldots d$, $\ldots d = \frac{-b . -c}{-a}$

$$= \frac{+bc}{-a} = -\frac{bc}{a} = -d$$ sein u. d.

§. 314.

§. 314.

Es ist algemein eingeführt diejenige Proportion, deren Geseze wir aus der von ihr §. 174. gegebnen Erklärung bisher entwikkelt haben, eine geometrische Proportion zu nennen, zum Unterschiede von einer andern so genanten arithmetischen Proportion, wovon wir in der Folge handeln werden. Man sagt nämlich z. B. daß die vier Zahlen 3, 5, 8, 10 in einer arithmetischen Proportion stehen, in welcher das 2te Glied um eben so viel größer ist, als das 1ste, um so viel das 4te Glied größer ist, als das 3te; da hingegen folgende Zahlen $3 : 5 = 8 : 13\frac{1}{3}$ in einer geometrischen Proportion stehen würden, in welcher das 2te Glied so viele male größer ist, als das erste; so viele male das 4te Glied größer ist, als das 2te.

§. 315.

Frage.

Wenn $a : b = c : d$, ist alsdan auch $a + c : b = c + b : d$?

§. 316.

Beantwortung.

Wenn 1) $a + c : b \overset{?}{=} c + b : d$ bejaht werden solte; so müste folgende Fragegleichung

2)

2) $ad + cd \overset{?}{=} bc + bb$ bejahet werden können, (dritter Lehrsaz §. 185.). Da nun ferner aus der angenommenen Proportion $a : b = c : d$ folgt, daß $ad = bc$; so wird zur Bejahung dieser Fragen bei 2) nothwendig erfordert, daß auch $cd = bb$, folglich $b = \sqrt{cd}$ sei, und nur in diesem Falle kan die angegebne Veränderung vorgenommen werden. So wird z. B. da $2 + \frac{2}{3} : 6 = 4 : 9$, und $6 = \sqrt{4 \cdot 9}$ ist, allerdings auch $2 + \frac{2}{3} + 4 : 6 = 4 + 6 : 9$ sein.

Auf diese Weise kan man allemal eine sichere Prüfung anstellen, ob eine gemachte Veränderung mit einer oder mehren Proportionen überhaupt richtig sei, oder nicht, und auch die besondern Bedingungen entdekken, unter welchen sie geschehen kan.

Während des Unterrichtes in den Lehren dieses Kapitels sind zugleich die geometrischen Lehrsäze von Num. 43 = = = 49 vorgetragen.

Drei=

Dreizehntes Kapitel.

Auflösung geometrischer Aufgaben.

§. 317.

LXVI. Aufgabe.

Alle drei Seiten des Triangels ABC (Fig. 13.) sind gegeben. Aus der Spize C fält auf die entgegenstehende Seite AB eine Normallinie CD, welche diese Seite AB in die beiden Theile AD und DB zerschneidet; man sol diese beiden Abschnitte finden.

§. 318.

Auflösung.

Es sei AC = a, BC = c, AB = b, der größere Abschnit DB = x, so ist der kleinere AD = b — x, und nach (Num. 35.) wird sein

$$a^2 - (b-x)^2 = CD^2$$

und da auch $c^2 - x^2 = CD^2$

so ist $a^2 - (b-x)^2 = c^2 - x^2$

dergleichen $a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) = c^2 - x^2$

oder (§. 246.) $a^2 - b^2 + 2bx - x^2 = c^2 - x^2$

daher $a^2 - b^2 + 2bx = c^2$.

und $2bx = b^2 + c^2 - a^2$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$x = \frac{b}{2} + \frac{c^2 - a^2}{2b}$$

§. 319.

§. 319.

Sind nun die Grössen der Seiten in Zahlen gegeben, als $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$, so findet man nach dieser Formel auch den Abschnit x in Zahlen, nämlich $x = \frac{7}{2} + \frac{64 - 36}{14} = \frac{7}{2} + \frac{28}{14} = 5\frac{1}{2}$, folglich den andern Abschnit $b - x$ $7 - 5\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

§. 320.

Wären aber die Seiten des Triangels in ungemessenen Linien gegeben, so kan man auch durch geometrische Operationen die Linie x finden; wenn man bedenkt, daß $\frac{c^2 - a^2}{2b} = \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$ (§. 251.)

Man finde nämlich nach der Proportion, $2b : c + a = c - a : L$, oder wenn die Linien $2b$ und $c + a$ gar zu groß sein solten, nach folgender, $b : \frac{c+a}{2} = c - a : L$, die Linie L; so wird $L = \frac{(c+a)(c-a)}{2}$ und $\frac{b}{2} + L = x$ das gesuchte gröste Segment BD sein.

§. 321.

Wenn in dem gegebnen Dreiek wäre AC = BC, also $a = c$, so wird, indem man nun c für a schreiben kan, $x = \frac{b}{2} + \frac{c^2 - c^2}{2b} = \frac{b}{2} + 0$; welches volkommen mit dem Lehrsaze der Geometrie

übereinstimt, daß eine aus der Spize eines gleichschenklichten Triangels auf die Grundlinie gefälte Perpendikulairlinie die Grundlinie in zwei gleiche Theile zertheilet.

§. 322.

LXVII. Aufgabe.

Es wird der Perimeter eines rechtwinklichten Dreieks und der Perpendikel gegeben, welcher aus der Spize des rechten Winkels auf die gröste Seite fält; man sol diese gröste Seite finden.

§. 323.

Vorbereitung.

Es sei Fig. 19. der Perpendikel $AD = a$, der Perimeter, das ist, $AB + AC + BC = p$, die gesuchte $BC = x$, so ist die Summe der beiden übrigen Seiten $AC + AB = p - x$; sezt man nun noch $AC - AB = y$, so ist (§. 130.) die größere Seite $AC = \frac{p - x + y}{2}$, die kleinere $AB = \frac{p - x - y}{2}$. Nachdem wir aber auf diese Art zwei unbekante Größen in den Kalkul gebracht haben; so müssen wir auch darauf bedacht sein, aus der Bestimmung der Aufgabe zwei verschiedene Gleichungen herzuleiten. Die eine Gleichung wird aus der Bestimmung hergeleitet, daß ABC ein rechtwinklichter Triangel ist, in welchem a) $BC^2 = AB^2 + AC^2$, die andere erhalten wir durch die Betrachtung, daß

sowohl

sowohl $\frac{BC \cdot AD}{2}$ als auch $\frac{AC \cdot AB}{2}$ den Inhalt des gesuchten Triangels angiebt, folglich α) $\frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AC \cdot AB}{2}$, also auch α) $BC \cdot AD = AC \cdot AB$ ist.

§. 324.

Auflösung.

Drükken wir nun die Linien dieser Gleichungen durch die angesezten Benennungen in Zahlen aus; so erhalten wir

$$a)\ x^2 = \left(\frac{p - x - y}{2}\right)^2 + \left(\frac{p - x + y}{2}\right)^2$$

$$\text{d. i. } b)\ x^2 = \frac{p^2 - 2px + x^2 - 2py + 2xy + y^2}{4} + \frac{p^2 - 2px + x^2 + 2py - 2xy + y^2}{4}$$

$$\text{daher } c)\ 4x^2 = 2p^2 - 4px + 2x^2 + 2y^2$$

$$d)\ x^2 = p^2 - 2px + y^2.$$

Die andere Gleichung ist

$$\alpha)\ ax = \left(\frac{p - x + y}{2}\right) \cdot \left(\frac{p - x - y}{2}\right) \text{ das ist}$$

$$\beta)\ ax = \frac{p^2 - px + py - px + x^2 - xy - py + xy - y^2}{4}$$

also γ) $4ax = p^2 - 2px - y^2 + x^2$, hiezu addirt d) $x^2 = p^2 - 2px + y^2$, erhalten wir e) $4ax = 2p^2 - 4px$,

daher f) $2ax = p^2 - 2px$, eine Gleichung,

 worin

worin nur noch die eine unbekante Größe x in der ersten Potenz enthalten ist. Aus derselben folgt ferner

daß g) $2ax + 2px = p^2$
oder h $(2a + 2p)x = p^2$
daher i) $x = \frac{p^2}{2a+2p} = \frac{p^2}{2(a+p)}$

§. 325.

Nach dieser Formel läßt sich nun x nicht nur durch Rechnung in Zahlen, sondern auch nach der Proportion $2(a+p) : p = p : x$, oder, wenn die Linie $2(a+p)$ zu groß für die Zeichnung werden solte, auch nach $\frac{a+p}{2} : \frac{p}{2} = \frac{p}{2} : x$ die Linie x durch geometrische Verzeichnung finden.

§. 326.

Die Fig. 19. vorgestelte Zeichnung ist nur als eine bis zur weitern Berichtigung entworfene Zeichnung anzusehen, welche nur dazu dienen sol, uns die Forderungen und Bedingungen der Aufgabe deutlich vor Augen zu stellen. Nachdem wir aber diese Forderungen entwikkelt haben, und durch diese Entwikkelung (Analyse) auf die lezte leicht zu übersehende Formel gekommen sind, nach welcher wir die wahre Größe der Hypothenuse x in unserm verlangten Triangel wirklich bestimmen können; so hält es auch nun nicht mehr schwer, die ganze Figur, welche in dieser Aufgabe verlangt wird, richtig

tig zu verzeichnen. Man mache nämlich Fig. 15. BC = x, entwerfe über BC einen halben Cirkel, mache die Normale BF = a, und ziehe durch F die Parallele FAA′, so wird sowohl ABC, als der ihm bis zur Dekkung gleiche Triangel A′BC, die Forderungen der Aufgabe erfüllen. Denn wir können folgendermaßen schließen: Die Hypothenuse des verlangten rechtwinklichten Triangels, dessen Perimeter einer gegebnen Linie gleich sein sol, mus nach der aus den Forderungen und Bedingungen der Aufgabe entwikkelten Formel = BC sein. Nun kan aber ausser den beiden Triangeln ABC und A′BC kein anderer Triangel von der Höhe BF = a über diese BC beschrieben werden, dessen Winkel bei A ein rechter Winkel wäre, folglich mus einer von diesen beiden, und da sich beide volkommen gleich sind, jeder von diesen Triangeln die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie überhaupt erfült werden können. Denn da nach der Gleichung bei i) der aus p und a bestimte Wert von x bei einerlei Werte von p desto kleiner werden mus, je größer a genommen wird, und es gleichwol kein rechtwinklichtes Dreiek geben kan, worinn die aus der Spize des rechten Winkels auf die Hypothenuse (x) gefälte Normale (a) größer als die halbe Hypothenuse wäre; so sieht man wol ein, daß die Aufgabe unmöglich werden mus, wenn a zu groß gegen p gegeben würde.

§. 327.

Dem kleinen Kunstgriffe, daß die beiden einzelnen Seiten AC und AB, durch ihre benante

Summe und Differenz ausgedrükt werden, hat man die bequeme Form der beiden Gleichungen bei γ) und d) zu danken, bei deren Addition sich verschiedene Glieder von unbekanten Größen gegen einander aufheben, und man würde in einen weit verwikkeltern Kalkul gerathen, wenn man etwan $AC = y$ und $AB = p - x - y$ sezen wolte. Dergleichen bequeme Benennung und andere ähnliche Kunstgriffe hängen von der Geschiklichkeit und dem Genie des Analisten ab, und lassen sich durch keine alzemeine Regeln bestimmen.

Wie viele Zeit und Mühe man durch eine vorläufige deutliche Ueberschauung der ganzen Aufgabe bisweilen ersparen könne, mag uns folgende kürzere Auflösung eben dieser Aufgabe lehren.

§. 328.

Kürzere Auflösung.

Man seze in dem rechtwinklichten Triangel ABC, Fig. 19. dessen Perimeter $= p$ und Höhe $AD = a$ sein sol, $AB = z$, $AC = y$, $BD = u$, $DC = r$, so daß $u + r = BC = x$: so ist, da $\triangle ABC \backsim ABD \backsim ADC$ (Num. 38.) und die Perimeter ähnlicher Triangel sich verhalten, wie zwei gleichnamige Seiten (Num. 46.)

$$z + a + u : z = p : x$$
$$y + r + a : y = p : x$$
$$p \quad : x = p : x, \text{ daher}$$

nach (§. 298.) $p + z + y + r + u + 2a : x + y + z = p : x$

oder

d. i. $2(p+a) : p = p : x$,

folglich $x = \frac{p^2}{2(p+a)}$.

§. 329.

Man kan diese lezte Proportion ohne viele Anstrengung sogleich in Gedanken übersehen, und dieselbe unmittelbar aus den Umständen der Aufgabe schließen. Denn da p : x das Verhältnis des Perimeters vom △ ABC zur grösten Seite desselben angiebt; so darf man sich nur das zweite Glied als die Summe von den grösten Seiten aller 3 Triangel (= p) vorstellen, um in das erste Glied ebenfals eine bekante Größe, nämlich die Summe aller Seiten dieser drei Triangel bringen zu können. Wenn man nun hiernach die vierte Proportionallinie x geometrisch findet; so ist dis wahrscheinlich die möglichst kürzeste geometrische Auflösung dieser Aufgabe.

§. 330.

LXVIII. Aufgabe.

Aus dem gegebnen Perimeter und Flächeninhalte eines rechtwinklichten Triangels Fig. 19. die gröste Seite desselben zu finden.

§. 331.

Vorbereitung.

Wenn wir den gegebnen Perimeter = p, die gesuchte BC = x benennen; so ist die Summe

der beiden übrigen Seiten $AB + AC = p - x$. Es läst sich aber durch diese benanten Linien noch kein Ausdruk finden, welcher dem gegebnen Flächenraume dieses Dreieks $= a^2$ gleich gesezt werden und die nöthige Gleichung geben könte. Man ist daher genöthigt, auch noch eine andere Seite als $AB = y$ zu benennen, wonach denn $AC = p - x - y$. Hiedurch hat man nun freilich 2 unbekante Größen in den Kalkul gebracht; es ergeben sich aber auch aus den beiden Bestimmungen der Aufgabe zwei Gleichungen, die eine daraus, daß ABC ein rechtwinklichter Triangel ist, also

A) $BC^2 = AB^2 + AC^2$, die andere daraus, daß der Inhalt des Triangels $= a^2$, also

α) $\frac{AB \cdot AC}{2} = a^2$ sein mus.

§. 332.

Auflösung.

Wir haben demnach, wenn in diesen beiden Gleichungen die angegebnen Benennungen gebraucht werden,

A) $x^2 = y^2 + p^2 - 2px + x^2 - 2py + 2xy + y^2$

daher B) $0 = 2y^2 + 2xy - 2px - 2py + p^2$

ferner α) $a^2 = \frac{py - xy - y^2}{2}$

daher β) $2a^2 = py - xy - y^2$.

Wird

Wird nun diese Gleichung bei β) mit der bei B) verglichen; so fält in die Augen, daß wenn man diese bei β) durch 2 multiplicirt, wodurch man erhält γ) $4a^2 = 2py - 2xy - 2y^2$ und darauf zu ihr die bei B) $o = 2y^2 + 2xy - 2px - 2py + p^2$ addirt, sich folgende δ) $4a^2 = -2px + p^2$ ergeben müsse, worin nur noch die eine unbekante Zahl x in der ersten Potenz sich befindet. Nach der gewöhnlichen Auflösung ergiebt sich hieraus

$$x = \frac{p^2 - 4a^2}{2p} \text{ oder } x = \frac{p}{2} - \frac{2a^2}{p}.$$

§. 333.

Nach Anleitung dieser Formel kan man nun wieder entweder die Zahl x der gesuchten Linie durch Rechnung, oder auch die Linie selbst sogleich durch geometrische Verzeichnung finden, indem man nach der Proportion $p : 2a = a : L$ die vierte Proportionale findet $L = \frac{2a^2}{p}$, welche L von der Linie $\frac{p}{2}$ abgezogen die gesuchte x oder BC giebt.

§. 334.

Andere Auflösung.

Diese leztere Aufgabe ist von der vorigen §. 322. nur darin unterschieden, daß stat des dort gegebnen Perpendikels $= a$, hier der Inhalt des Triangels $= a^2$ gegeben ist. Wenn man nun das Perpendikel AD in diesem Triangel b nennet, so ist,

indem AC $= x$ als die Grundlinie betrachtet wird, b die Höhe dieses Triangels, und demnach $\frac{bx}{2} = a^2$, daher $b = \frac{2a^2}{x}$. Schreibt man nun in die (§. 328.) gefundene Formel $x = \frac{p^2}{2p+2a}$ stat des dort gegebnen Perpendikels a den Werth, welchen eben dieser Perpendikel in unsrer jezigen Aufgabe haben mus: so gilt diese Formel alsdan auch für die jezige Aufgabe. Man erhält auf diese Weise $x = \frac{p^2}{2p+\frac{4a^2}{x}}$, daher auch $1 = \frac{p^2}{2px+4a^2}$, und $2px + 4a^2 = p^2$, woraus wie §. 233. $x = \frac{p^2 - 4a^2}{2p}$ gefunden wird.

In folgenden Aufgaben wollen wir nunmehro einige Beispiele von einer reinen geometrischen Auflösung geben.

§. 335.

LXIX. Aufgabe.

Einen rechtwinklichten Triangel zu beschreiben, dessen Hypothenuse der gegebnen BC (Fig. 16.) und dessen Inhalt dem gegebnen Quadrate Q^2 gleich sei.

§. 336.

§. 336.

Auflösung.

Diese Aufgabe enthält 2 Forderungen: 1) sol der Winkel BAC, welcher der gegebnen BC gegenüber liegen wird, ein rechter Winkel, und 2) der Flächenraum des Triangels A B C dem Inhalte eines gegebnen Quadrates gleich sein, dessen Seite Q ist.

Alle diejenigen Punkte, wo die Spize des Winkels BAC liegen kan, so daß der ersten Forderung Genüge geschieht und BAC ein rechter Winkel wird, werden durch den über BC beschriebnen halben Cirkelkreis bestimt. Denn, wenn ich aus irgend einen beliebigen Punkte, als A, A', &c. dieses halben Cirkels nach B und C die Schenkel AB und AC ziehe; so wird allemal der dadurch bei A entstehende Winkel BAC ein rechter Winkel sein. Sobald aber ein anderes Punkt P, welches nicht in diesem Kreise liegt, zur Spize dieses Winkels genommen würde; so würde der Winkel CPB ein stumpfer Winkel werden, wenn das Punkt P innerhalb dieses Kreises, und CPB ein spiziger Winkel werden, wenn das Punkt P ausserhalb des Cirkelkreises angenommen würde. Es ist also ausgemacht, daß die Spize A des verlangten Triangels in dem beschriebenen halben Kraise liegen müsse.

Die zweite Forderung betrift die Grösse des Triangels BAC, welche bei der einmal bestimten

Basis

Basis BC dadurch zu erhalten ist, daß man diesem Triangel die gehörige Höhe giebt. Es wird aber die Normale B F die erforderliche Höhe sein, wenn sie die mitlere Proportionale ist zwischen den Linien $\frac{BC}{2}$ und Q, denn, wenn $\frac{BC}{2} : Q = Q : FB$ ist; so wird auch $\frac{BC}{2} . FB = Q . Q$, das ist, die Zahl, welche den Flächenraum des Triangels angiebt, derjenigen Zahl gleich sein, welche den Flächenraum des Quadrates angiebt. Zieht man daher die mit B C parallele F G; so ist nun ferner auch ausgemacht, daß die Spize A in dieser FS liegen müsse, wenn der Triangel B A C dieser zweiten Forderung Genüge leisten sol. Aus der Zeichnung Fig. 16. ergeben sich daher die beiden Schneidungspunkte A und A' als die einzigen Oerter, wo die Spizen derjenigen Triangel liegen können, welche beide Forderungen der Aufgabe zugleich erfüllen, und es wird sowohl BAC, als BA'C der verlangte Triangel sein.

§. 337.

Wenn stat des Quadrates Q^2 ein größeres Quadrat gegeben würde, dessen Seite $= \frac{BC}{2}$ wäre, so wird, da nun in der Proportion, wodurch die FB bestimt wird, in $\frac{BC}{2} : Q = Q : FB$,

BC

$\frac{BC}{2}$ stat Q geschrieben werden kan, in $\frac{BC}{2} : \frac{BC}{2} = \frac{BC}{2} : BF'$, die BF' nothwendig $= \frac{BC}{2} = JH$ werden; so daß die Parallele $F'H$ den Kreis nur in dem Einen Punkte H berührt, und nur ein einziger Triangel BHC für diese Größe von Q^2 den beiden Forderungen der Aufgabe zusammengenommen Genüge leistet.

Würde aber die Seite Q noch größer als $\frac{BC}{2}$ genommen, so würde auch die alsdenn erforderliche Höhe des Triangels BF'' größer als JH, folglich die Parallele $F''G''$ nunmehr kein einziges mit dem Kreise gemeinschaftliches Punkt haben. Es lassen sich in diesem Falle unzählige Triangel verzeichnen, welche die erste Forderung bei 1) und ebenfals unzählige Triangel verzeichnen, welche die zweite Forderung bei 2) erfüllen; aber es giebt keinen einzigen Triangel, welcher beiden Forderungen zugleich Genüge leistete. In sofern nun beide Bedingungen der Aufgabe unmöglich ferner mit einander bestehen können, sagt man, daß diese Aufgabe unmöglich sei, sobald $Q > \frac{BC}{2}$ gegeben werde, und daß der Werth von $Q = \frac{BC}{2}$ die Gränze der Möglichkeit bestimme. Diese Gränze der Möglichkeit sondert nur alle diejenigen Linien, welche grösser als $\frac{BC}{2}$ sind, als solche Grösse

ab,

ab, welche man der Q nicht geben darf. In andern Aufgaben hat man noch eine zweite Gränze zu bestimmen, wodurch auch diejenigen Linien ausgeschlossen werden, welche wegen ihrer zu geringen Grösse die Aufgabe unmöglich machen würden. Allein in dieser Aufgabe mag die Q so klein gegeben werden, und daher die B f so klein zu nehmen sein, als man nur wil; so wird doch die durch f mit B C gezogene Parallele den Kreis in 2 Punkten außerhalb der B C so lange schneiden, und dadurch 2 Oerter für die Spize des verlangten Triangels angeben, bis B f = 0 wird, welches nicht eher geschieht, als wenn Q = 0 gegeben wird.

§. 338.

LXX. Aufgabe.

Ein Parallelogram zu verzeichnen, welches halb so groß ist, als ein gegebnes Trapezium.

§. 339.

Auflösung.

Man theile jede Seite des Trapeziums A C D B Fig. 17. in zwei gleiche Theile, und ziehe zwischen diesen Theilungspunkten die Linien F E, E H, H G, G E; so wird 1) die Figur F E H G, ein Parallelogram, und 2) dieses Parallelogram halb so groß, als das Trapezium sein.

§. 340.

§. 340.

Beweis.

Ziehet man die Hülfslinie CB; so wird, weil AC:AG (= 2 : 1) = AB : AF ist, GF ⌢ CB (Num. 37) und daher o = u sein. Da nun ferner ⊳ GAF = ⊳ CAB; so mus (Num. 38.) △ACB ∽ △AGF, folglich AC : AG = CB: GF, und daher GF = ½ . CB sein.

Auf eben die Weise kan auch die Aehnlichkeit der beiden Triangel CBD und HED erwiesen, und daraus gefolgert worden, daß auch HE = ½ . CB, also HE = GF sei.

Zieht man nun noch die AD; so folgt nach denselben Schlüssen, daß sowohl FE als GH = ½ . AD, folglich FE = GH sei.

Wenn aber HE = GF und FE = GH ist; so ist (Num. 32) die Figur FEHG ein Parallelogram, und hiemit die erste Behauptung bei 1) erwiesen.

Da nun △ AGF ∽ ACB; so ist (Num. 47) △ ACB : △ AGF = AC^2 : AG^2 : Es ist aber $AC^2 : AG^2 = (2)^2 : (1)^2 = 4:1$ folglich auch 4 : 1 = △ ACB : △ AGF und

daher

daher $AGF = \frac{1}{4} . ACB$. Eben so wird erwiesen,
daß $HDE = \frac{1}{4} . CDB$
$FBE = \frac{1}{4} . ABD$
$HCG = \frac{1}{4} . ACD$ folg-

lich $AGF + HDE = \frac{ACB + CDB}{4} = \frac{ABDC}{4}$

und $FBE + HCG = \frac{ABD + ACD}{4} = \frac{ABDC}{4}$

also $AGF + HDE + FBF + HCG = \frac{ABDC + ABDC}{4}$

$= \frac{1}{2} . ABDC$ ist.

Wenn aber diese in der linken Seite der Gleichung benanten 4 Triangel zusammengenommen gerade die Hälfte des ganzen Trapeziums betragen; so mus auch der übrige in dem Parallelogramme eingeschlossene Raum desselben genau die andere Hälfte desselben ausmachen, und so ist hiermit auch die zweite Behauptung erwiesen.

§. 341.
LXXI. Aufgabe.

Aus der verzeichneten Figur 18. sind mir die beiden Winkel o und u, und die beiden Segmente BD und DE der geraden Linie BE gegeben; ich sol daraus die ganze Zeichnung herstellen.

§. 342.
Erste Auflösung.

Wenn die Winkel o und u einzeln gegeben sind, so ist dadurch auch der Winkel o + u

oder

oder BAE, und wenn mir die Segmente BD und DE einzeln gegeben sind, auch die ganze Linie BE gegeben. Durch die 3 Punkte, B, A, E, mus sich ein Cirkel beschreiben lassen (Num. 21.) worin BE eine Sehne und BAE ein Winkel an der Peripherie ist, welcher auf dem unter dieser Sehne liegenden Bogen stehet. Zieht man daher Fig. 17. die Linie be = BE; so mus das Centrum dieses Cirkels in der aus der Mitte dieser Sehne m aufgerichteten Normale mf liegen (Num. 20.). Es komt nunmehro nur noch darauf an, diesen Cirkel gerade so groß zu beschreiben, daß der über die Sehne be zu legende Peripheriewinkel bae dem gegebnen BAE gleich werde. Macht man nun ∠ebn = BAE und zieht auf bn die Normale bc; so wird ein jeder in dem mit cb beschriebnen Kreise über dem Bogen bge stehender Peripheriewinkel, wie z. B. bae dem Winkel ebn (= BAE) gleich sein (Num. 17.) und man weis nunmehro so viel, daß der Punkt a irgendwo in dem Bogen bfe liegen müsse.

Der Punkt a mus aber ferner in diesem Bogen dergestalt genommen werden, daß eine aus a zu ziehende den Winkel bae theilende Linie ag dergestalt gezogen werden könne, daß 1) diese Linie in der be ein Segment bd = AD abschneide, und 2) der Winkel bag alsdan auch = o werde. Macht man bd = BD, so geschieht der Forderung bei 1) allein genommen, durch eine jede

von den unzähligen geraden Linien eine Genüge, welche wie h d i durch das Punkt d gehen. Macht man ferner den Centerwinkel b c g = 2 o, so wird jeder auf dem Bogen b g stehende Peripheriewinkel = o, folglich die Forderung bei 2) durch eine jede von den unzähligen Linien erfült, welche wie z. B. g A', g A'' aus g nach irgend einem Punkte des Bogens b f e gezogen werden. Aber nur die einzige gerade aus g durch d gezogene Linie erfült beide Forderungen zugleich; daher ist das von dieser Linie in a bestimte Schneidungspunkt der einzige Punkt wo man a nehmen mus, damit die ganze Zeichnung a b d e der ABDE volkommen gleich werde.

§. 343.
Zweite Auflösung.

Die beiden bestimten Punkte b, d, und der noch zu bestimmende Punkt a, müssen alle drei in Einem gemeinschaftlichen Cirkelkreise liegen, dessen Centrum in der auf die Mitte der Sehne b d normalen m f, liegen mus. Mache ich Fig. 20. den ∠ d b n = BAD; und ziehe die auf n b Normale b c, so wird jeder in dem mit c b beschriebnem Cirkel auf dem Bogen b f d eben so wohl als d b n stehende Peripheriewinkel = d b n = BAD sein. Der Punkt a mus daher in dem Bogen b f d liegen. Macht man ferner d c g = 2 u, so wird jeder auf dem Bogen d g stehende Peripheriewinkel = u, folglich wenn d e = DE gemacht wird, von der durch e g gezogenen Linie in a das gesuchte Punkt a bestimt.

§. 344.

§. 344.

Dritte Auflösung.

Man ziehe Fig. 21 aus der Mitte m der gegebnen bd die Normale mf, mache dbg = o, und ziehe aus b die auf bg normalstehende bc; so wird der aus dem Schneidungspunkte c mit cb beschriebne Kreis gerade die Größe haben, daß jeder Winkel bad = dgb = o wird, wenn das Punkt a irgend ein Punkt des Bogens bfd ist. Zieht man ebensals aus l, der Mitte von de, die Normale lr, macht edz = u und dr normal auf dz; so wird ein jeder Winkel dae = edz = u sein, wenn a irgend ein Punkt des Bogens dpe ist. Der Schneidungspunkt dieser beiden Cirkel in a bestimt daher die Spize unserer verlangten Zeichnung abde, welche der ABDE volkommen gleich sein wird.

Algemeiner Beweis.

In einer jeden Auflösung ist be = BE und bd = BD gemacht: daher kan die Linie BDE auf die bde dergestalt gelegt werden, daß B in b, D in d und E in e fält. Da nun aus einer jeden Auflösung erhellet, daß es nur ein einziges Punkt a über die Linie be giebt, so daß bad = o, und ead = u wird; so mus, da BAE = o, und EAD = u, oder welches nun einerlei ist, bAe = o, und ead = u ist, auch A in a fallen; folglich AB = ab, AD = ad und AE = ae sein, und sich ABDE mit abde dekken.

Vierzehntes Kapitel.

Von den unreinen quadratischen Gleichungen.

§. 345.

LXXII. Aufgabe.

Ich habe zwei Zahlen; die eine ist um 6 größer als die andere, und das Produkt aus beiden ist 91; welches sind die beiden Zahlen?

§. 346.

Auflösung.

Die kleinere Zahl sei x; so ist die größere $x + 6$, das Produkt aus beiden $x(x + 6)$, oder $x^2 + 6x$. Es wird demnach verlangt, daß sein sol

$$x^2 + 6x = 91.$$

Wir müssen mit dieser Gleichung, wie allemal bei der Auflösung einer Gleichung, solche Veränderungen vorzunehmen suchen, daß wir endlich auf der einen Seite nur die unbekante Zahl x, auf der andern Seite hingegen bloß bekante Zahlen erhalten. Man sieht aber leicht, daß so wenig eine Versezung der Glieder, als irgend eine Multiplikation oder Division der beiden Seiten uns diesem Zwekke näher bringen würde; auch sehen wir kein Mittel vor uns, wodurch wir etwan aus $x^2 + 6x$

die

die Wurzel ziehen und angeben könten. Je mehr wir durch diese Betrachtungen von der Schwierigkeit unsers Vorhabens überzeugt sind, um so viel mehr wird es uns erfreuen, daß wir durch folgenden kleinen Kunstgrif so leichte zu unserm Zwekke gelangen können.

Wenn wir nämlich $(x+b)^2$ das ist (§. 255.) $x^2+2bx+b^2$ mit der linken Seite unserer Gleichung $x^2+2.3x$ vergleichen; so sehen wir ohne Mühe ein, daß diese beiden Glieder allerdings der Anfang zu einem Binomialquadrate sind, dessen erster Wurzeltheil x, und anderer Wurzeltheil 3 ist; denn $(x+3)^2$ giebt $x^2+2.3x+9$. Indem wir also zur linken Seite unserer Gleichung noch das Glied $+9$, und, damit die Gleichheit beider Seiten erhalten werde, ebenfals zur rechten Seite $+9$ hinzusezen; so erhalten wir eine Gleichung

$$x^2+2.3x+9 = 91+6$$

deren linke Seite nun gewiß ein volkomnes Quadrat ist. Sol nun $x^2+2.3x+9 = 91+9$ sein; so mus

auch §. 162. $\sqrt{(x^2+2.3x+9)} = \sqrt{91+9}$

das ist $x+3 = \sqrt{100}$

daher $x = -3 \mp 10$ sein.

Hienach wird nun die kleinere Zahl x entweder $= -3+10 = 7$, demnach die größere $y = 7+6 = 13$; oder es kan auch genommen

werden $x = -3 - 10 = -13$, wo alsdenn die größere $y = -13 + 6 = -7$ wird. In der That erfüllen sowohl die beiden Zahlen 7, 13, als auch $-13, -7$, alle Forderungen der Aufgabe.

§. 347.

Eine solche Gleichung wie diese $x^2 + 6x = 91$ heist eine unreine quadratische Gleichung, so wie jede ähnliche Gleichung, worinnen dreierlei Glieder vorkommen, erstens solche Glieder, welche das Quadrat einer unbekanten Zahl, zweitens solche, welche die unbekante Zahl selbst in der ersten Potenz, und drittens solche, welche diese unbekante Zahl gar nicht enthalten.

§. 348.

LXXIII. Aufgabe.

Zwei Personen verkaufen etliche Ellen Zeug, der andere 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Rthlr. Es sagt der erste zum andern: hätte ich dein Zeug so theuer wie das meinige verkauft; so hätte ich daraus 24 Rthlr. gelöset; darauf antwortet der andere: hätte ich dein Zeug wie das meinige verkauft; so hätte ich daraus $12\frac{1}{2}$ Rthlr. gelöset. Wie viel Ellen hat jeder gehabt?

§. 349.

Auflösung.

Der erste habe gehabt x Ellen, folglich der der andere x + 3 Ellen. Der erste würde, wie er sagt, verkaufen

x + 3 Ellen für 24 Rthlr. folglich x Ellen, für $\frac{24x}{x+3}$

der andere hätte gelöset aus

x Ellen $\frac{25}{2}$ Rthlr. folglich hat er aus x + 3 Ellen $\frac{25(x+3)}{2x}$ Rthlr. gelöset.

Demnach mus sein

$\frac{24x}{x+3} + \frac{25x+75}{2x} = 35$ durch 2x

multiplicirt $\frac{48x^2}{x+3} + 25x + 75 = 70x$

oder $\frac{48x^2}{x+3} - 45x + 75 = 0$; durch x + 3

multiplicirt $48x^2 - 45x^2 - 135x + 75x + 225 = 0$

oder $3x^2 - 60x = -225$; durch 3

dividirt $x^2 - 20x = -75$.

Vergleicht man auch hier

mit $(x-b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$ die beiden Glieder der linken Seite $x^2 - 20x$

so fält in die Augen, daß diese beiden Glieder der Anfang von dem Quadrate $(x - 10)^2 = x^2 - 20x + 100$ sind, und daher diese linke Seite gewis eine volständige Quadratzahl wird, sobald man

man nur + 100 hinzusezt. Nachdem nun, um die Gleichheit beider Seiten zu erhalten, auch zur rechten Seite + 100 hinzugesezt ist; so erhält man die Gleichung

$$x^2 - 20x + 100 = -75 + 100$$

daher auch $\sqrt{(x^2 - 20x + 100)} = \pm\sqrt{25}$

das ist $x - 10 = \pm 5$

daher $x = 10 \pm 5$.

Durch den doppelten Werth der Wurzel, welche sowohl + 5 als — 5 sein kan, erhält man also zwei Auflösungen. Nach der ersten hat die erste Person 15 Ellen, die andere 15 + 3 = 18 Ellen gehabt. Wenn nun der erste aus 18 Ellen 24 Rthlr. lösen kan, so hat er 15 Ellen für 20 Rthlr.; der andere, welcher aus 15 Ellen $\frac{25}{2}$ Rthlr. lösen kan, seine 18 Ellen für 15 Rthlr. verkauft; und auf diese Art haben beide zusammen allerdings 35 Rthlr. gelöset. Nach der andern Wurzel hat der erste 10 — 5 das ist 5 Ellen, der andere also 5 + 3, das ist, 8 Ellen gehabt. In diesem Falle mus der erste, welcher, wie er sagt, aus 8 Ellen 24 Rthlr. gelöset haben würde, seine 5 Ellen für 15 Rthlr. und der andere, welcher aus 5 Ellen $\frac{25}{2}$ gelöset haben würde, seine 8 Ellen für 20 Rthlr. verkauft haben: und auch in diesem Falle würden beide zusammen 35 Rthlr. gelöset haben.

§. 350.

§. 350.

LXXIV. Aufgabe.

Die Summe zweier Zahlen ist s, das Produkt derselben, p: welches sind die beiden Zahlen?

§. 351.

Auflösung.

Es sei die eine gesuchte Zahl x, die andere y; so ist

I. $x + y = s$ II. $x y = p$,

folglich $y = s - x$. Schreibt man nun diesen Werth von y nämlich $s - x$ stat y in die zweite Gleichung $x y = p$; so erhält man $x (s - x) = p$, oder $s x - x^2 = p$.

Die Auflösung einer solchen Gleichung wird dadurch sehr erleichtert, daß man die Glieder derselben allemal in einer bestimten Ordnung, welche sich nach der unbekanten Zahl richtet, auf folgende Art schreibt:

$$- x^2 + s x = p$$

In eben der Absicht mus man jezt, da das erste Glied negativ ist, die Zeichen aller Glieder verwechseln, damit das erste Glied positiv werde; so erhält man (§. 131.)

$$x^2 - s x = - p$$

In dieser Gleichung ist der Koefficient des ersten Gliedes 1, der Koefficient des zweiten Gliedes $- s$: denn so wird der bekante Faktor eines jeden

Gliedes genant, welches ein Produkt aus diesem Koefficienten und der unbekanten Zahl in der ersten oder zweiten Potenz ist. Um zur Auflösung dieser Gleichung zu gelangen; so bemerke man, daß $\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{2s}{2}x + \frac{s^2}{4}$, und demnach die linke Seite der Gleichung durch den Zusaz von $\frac{s^2}{4}$ (= dem Quadrate des halben Koefficienten im 2ten Gliede) eine volständige Quadratzahl wird, deren Wurzel $x - \frac{s}{2}$ ist.

Ist nun $x^2 - sx = -p$

so ist auch $x^2 - sx + \frac{s^2}{4} = -p + \frac{s^2}{4}$

also $\sqrt{\left(x^2 - sx + \frac{s^2}{4}\right)} = \mp\sqrt{\left(-p + \frac{s^2}{4}\right)}$

das ist $x - \frac{s}{2} = \mp\sqrt{\left(-p + \frac{s^2}{4}\right)}$

daher $x = \frac{s}{2} \mp \sqrt{\left(-p + \frac{s^2}{4}\right)}$

§. 352.

Wäre gegeben $s = 12$, $p = 35$; so würde sein $x = \frac{12}{2} \mp \sqrt{(-35 + 36)} = 6 \mp \sqrt{1} = 6 \mp 1$, also sein sowohl $x = 6 + 1 = 7$, daher $y = 12 - 7 = 5$; als auch sein $x = 6 - 1 = 5$, und daher die andere Zahl $y = 12 - 5 = 7$.

§. 353.

Wäre gegeben $s = 8$, $p = 14$, so wird $x = 4 \mp \sqrt{-14+16}$, wo $\sqrt{-14+16} = \sqrt{2}$ niemals ganz genau angegeben werden kan, indem 2 eine Irrationalzahl ist.

§. 354.

Würde $s = 12$, $p = 38$ gegeben, so wäre $x = 6 \mp \sqrt{(-38+36)}$ wo $\sqrt{(-38+36)} = \sqrt{-2}$ eine unmögliche Größe ist (§. 283.) welche man gar nicht angeben kan. Man sieht auch leicht ein, daß man zwei sich selbst widersprechende Forderungen thut, wenn man verlangt, daß zwei Zahlen zusammen addirt nur 12, und doch in einander multiplicirt 38 geben sollen.

Aus der gefundnen Formel lassen sich auch gar leicht die Gränzen der Möglichkeit für diese Aufgabe bestimmen; denn der Ausdruk $\sqrt{(-p+\frac{s^2}{4})}$ wird offenbar allemal alsdenn und nur in dem Falle eine unmögliche Größe, wenn $p > \frac{s^2}{4}$ wird.

§. 355.

Da bei der Auflösung dieser Gleichung $x^2 - sx = -p$ (§. 351.) alles darauf ankam, daß man zu beiden Seiten den halben Koefficienten des zweiten Gliedes quadrirt hinzusezte, und dieses allemal geschehen kan, was auch s für eine Zahl sein mag; so sieht man leicht ein, daß diese Auflösung bei

allen unreinen quadratischen Gleichungen angewandt werden kan, vorausgesezt, daß man die Gleichung zuvor auf die Form $x^2 \mp Sx = \mp P$ gebracht, das ist, dergestalt zubereitet habe, daß das erste Glied nicht nur positiv ist, sondern auch keinen andern Koefficienten außer der 1 hat. Das erste kan allemal durch Verkehrung der Zeichen (§. 131.), das zweite dadurch erhalten werden, daß man die ganze Gleichung durch den Koefficienten des ersten Gliedes gehörig dividirt oder multiplicirt. So wird z. B.

aus $bx^2 + rx = a + b$, nachdem durch b dividirt worden $x^2 + \frac{r}{b}x = \frac{a}{b} + 1$,

aus $\frac{x^2}{n} - \frac{1}{6}x = -\frac{p}{q}$, nachdem durch n multiplicirt worden, $x^2 - \frac{n}{b}x = -\frac{np}{q}$.

§. 356.

Man merke sich, daß aus der Gleichung
$x^2 - Sx = -P$, nach §. 351.
wird $x = \frac{S}{2} \mp \sqrt{(-P + \frac{S^2}{4}}$,
und daß aus der Gleichung $x^2 + Sx = P$ folgen
würde $x = -\frac{S}{2} \mp \sqrt{(P + \frac{S^2}{4})}$ (*)
so

(*) Denn wenn $x^2 + Sx = P$
so ist auch $x^2 + Sx + \frac{S^2}{4} = P + \frac{S^2}{4}$,
also

so kan man nach Anleitung dieser Formel, z. B. aus der Gleichung $x^2 + 12x = -35$, sogleich schreiben, daß $x = -6 \mp \sqrt{(-35 + 36)}$
aus $x^2 - 6bx = a + b$,
daß $x = 3b \mp \sqrt{(a + b + 9b^2)}$

§. 357.

LXXV. Aufgabe.

Zwei Personen haben ein Kapital von 200 Rthlr. zu einem Handel zusammengebracht und eingelegt. Der erste läßt sein Geld 4 Monate darin und zieht darauf mit seiner Einlage und seinem Gewinste zusammen 176 Rthlr.; der andere hatte sein Geld nur 3 Monate im Handel, und mit Einlage und Gewinst zusammen 228 Rthlr. gezogen. Wie viel hat jeder eingelegt?

§. 358.

Auflösung.

Die Einlage des erstern sei $= x$, des andern also $200 - x$; so hat der erste mit seinem Kapital x in 4 Monaten gewonnen $176 - x$, der andere in 3 Monaten mit seinem

also $\sqrt{(x^2 + Sx + \frac{S^2}{4})} = \mp \sqrt{(P + \frac{S^2}{4})}$

das ist, $x + \frac{S}{2} = \mp \sqrt{(P + \frac{S^2}{4})}$

folglich $x = -\frac{S}{2} \mp \sqrt{(P + \frac{S^2}{4})}$.

seinem Kapitale $200 - x$ gewonnen $228 - 200 + x = x + 28$ Rthlr. Dieser leztere gewint daher mit seinem Kapitale in 1 Monate $\frac{x+28}{3}$ und würde in 4 Monaten damit gewinnen $\frac{4x + 112}{3}$. Wir wissen also nunmehro, daß in einerlei Zeit, nämlich in 4 Monaten, das Kapital x gewint $176 - x$, das andere Kapital $200 - x$ gewint $\frac{4x + 112}{3}$; und da nothwendig in einerlei Zeit der Gewinst des einen Kapitals gerade so viel mal größer sein mus, als der Gewinst des andern Kapitals, um so viele mal das eine Kapital selbst größer ist, als das andere Kapital, so haben wir folgende Proportion

$$x : 200 - x = 176 - x : \frac{4x + 112}{3}$$

daher (§. 180.)

$$\frac{4x^2 + 112x}{3} = 35200 - 200x - 176x + x^2$$

oder $\frac{4x^2 + 112x}{3} = 35200 - 376x + x^2$

also auch $4x^2 + 112x = 105600 - 1128x + x^2$

daher $x^2 + 1240x = 105600$

daraus nach (§. 356.)

$$x = -620 \mp \sqrt{(105600 + (620)^2}$$

$$x = -620 \mp \sqrt{(490000)}$$

$$x = -620 \mp 700$$

§. 359.

§. 359.

Hienach ergiebt sich, wenn die positive Wurzel gebraucht wird, $x = 80$ Rthlr. daher die Einlage der andern Person = 120 Rthlr. Der Gewinst der ersten Person ist also 96 Rthlr. welche von 80 Rthlr. in 4 Monaten gekommen sind, wonach 10 Rthlr. in einem Monate 3 Rthlr. gewonnen haben. Der Gewinst der zweiten Person, welcher mit 120 Rthlr. in 3 Monaten erworben ist, beträgt 108 Rthlr. welches ebenfals danach richtig ist, daß 10 Rthlr. in einem Monate 3 Rthlr. geben.

§. 360.

LXXVI. Aufgabe.

Ein Kaufman hat eine Summe von a Rthlr. in einem Handel angelegt, wodurch sich dies Kapitel in 2 Jahren um b Rthlr. vermehrt hat, und verlangt nun zu wissen, wie viel er jährlich mit 100 Rthlr. gewonnen?

§. 361.

Vorbereitung.

Es sei x die Zahl von Rthlr., welche jährlich mit 100 Rthlr. gewonnen sind; so wird da $100 : a = x : \frac{ax}{100}$, und da offenbar die Gewinste zweier Kapitalien sich gegen einander wie die Kapitalien

selbst

selbst verhalten müssen, $\frac{ax}{100}$ den Gewinst ausdrükken, welchen a Rthlr. in einem Jahre geben. Nach Verlauf des ersten Jahres ist demnach das Kapital a zu $a + \frac{ax}{100}$ angewachsen, welches vermehrte Kapital nun das zweite Jahr hindurch mit jedem 100, wiederum x Rthlr. gewinnet; so daß in folgender Proportion $100 : a + \frac{ax}{100} = x : \frac{ax}{100} + \frac{2x^2}{10000}$ die vierte Proportionalzahl den Gewinst des zweiten Jahres angiebt.

§. 362.

Auflösung.

Diesemnach mus sein

$$\frac{ax}{100} + \frac{ax}{100} + \frac{ax^2}{10000} = b$$

also auch $100\,ax + 100\,ax + ax^2 = 10000\,b$

und $x^2 + 200\,x = \frac{10000\,b}{a}$

daher $x = -100 \mp \sqrt{\left(\frac{10000\,b}{a} + 10000\right)}$

§. 363.

Wäre nun z. B. das eingelegte Kapital $a = 1200$ Rthlr. der ganze zweijährige Gewinst $b = 305 + \frac{28}{100} = \frac{30528}{100}$ Rthlr.; so würde

$\frac{10000\,b}{a} + 10000 = \frac{10000 \,.\, 30528}{1200 \,.\, 100} + 10000$

$= \frac{30528}{12} + 10000 = 12544,$

folglich

folglich $x = -100 \pm \sqrt{12544} = -100 \pm 112$, so daß $x = 12$ Rthlr. wird, wenn man die positive Wurzel nimt, aber $x = -212$ Rthlr. würde, wenn man die negative Wurzel gebrauchen wolte. Von der Sicherheit des positiven Werthes kan uns folgende Probe versichern.

100 Rthlr. gewinnen 12 Rthlr. wie viel gewinnen 1200 Rthlr.? Antwort 144 Rthlr. Das im Handel stehende Kapital wird also im zweiten Jahre 1200 + 144, das ist 1344 Rthlr.

Im zweiten Jahre wird nun wieder mit jedem 100 gewonnen 12 Rthlr. also mit 1344 Rthlr. gewonnen 161,28 Rthlr., so daß die Gewinste von beiden Jahren allerdings 305,28 Rthlr. betragen.

§. 364.

Der negative Werth von $x = -212$ könte nichts anders bedeuten, als daß der Handel so schlecht gegangen wäre, daß mit jedem 100 Rthlr. 212 Rthlr. verloren wären. Da aber in der Aufgabe vielmehr angegeben wird, daß man gewonnen habe; so kan diese Wurzel zur Beantwortung unserer Aufgabe gar nicht in Betrachtung kommen. Wolte man aber den Werth von x für den Fal finden, da bei dem ganzen Handel in zwei Jahren b Rthlr. verloren wären; so müste, wenn x, als ein Verlust, mit — bezeichnet werden solte, auch der

zweijährige Verlust b mit — bezeichnet werden. Dadurch würde

die Gleichung $x^2 + 200\,x = \frac{10000\,b}{a}$ verändert in

$$x^2 - 200\,x = -\frac{10000\,b}{a}$$

$$\text{also } x = 100 \mp \sqrt{-\frac{10000\,b}{a} + 10000}$$

$= 100 \mp \sqrt{7456} = 100 \mp 86,34$ rc. daher, wenn der negative Werth gebraucht wird, $x = 13,65$ — rc. werden: denn es mus dieser Werth um einige Tausendtel, Zehntausendtel rc. Thaler zu groß sein, weil die von 100 abzuziehende Wurzel um einige Tausendtel rc. zu klein war. Nimt man aber an, daß 100 Rthlr. in einem Jahre 13,65 Rthlr. verlieren; so wird mit 1200 Rthlr. im ersten Jahre 163,92 Rthlr. und mit dem übrigbleibenden Kapitale 1036,08 Rthlr. im zweiten Jahre 141,528428 Rthlr. verloren. Diese beiden Verluste geben zusammen 305,448428 Rthlr. also ziemlich genau den angegebnen Verlust von 305 Rthlr.

Im folgenden Kapitel wird die Anwendung der nöthigsten stereometrischen Säze gezeigt, welche im zweiten Anhange von Num. 59. an kürzlich angeführt sind.

Funf-

Funfzehntes Kapitel.

Stereometrische Aufgaben.

§. 365.

LXXVII. Aufgabe.

Den Diameter eines Cylinders zu finden, welcher einem gegebnen Kegel der Höhe und dem Inhalte nach gleich sein sol.

§. 366.

Auflösung.

Die Höhe des Kegels sei $= h$, der Diameter seiner Grundfläche $= d$. Wenn der Diameter d eines Cirkels gegeben ist; so kan auch die Peripherie desselben als eine bekante Größe betrachtet werden, indem dieselbe allemal 3, 14 . d ist. Nennen wir diese Peripherie $= p$, und den gesuchten Diameter des Cylinders x; so ist die zum Diameter x gehörige Peripherie $= \frac{p\,x}{d}$ weil sich allemal verhält $d : p = x$: Peripherie desjenigen Cirkels, dessen Diameter x ist. (Num. 48.) Nach diesen Benennungen wird

die Grundfläche des Kegels ausgedrükt durch die Zahl $\frac{p\,d}{4}$ (Num. 36.), der Inhalt des Kegels durch $\frac{h\,p\,d}{3 \cdot 4}$ (Num .54.)

die Grundfläche des Cylinders ausgedrükt durch $\frac{px}{d} \cdot \frac{x}{4}$ oder $\frac{px^2}{4d}$, der Inhalt des Cylinders durch $\frac{hpx^2}{4d}$ (Num. 51.)

Folglich sol nach der Forderung der Aufgabe sein $\frac{hpx^2}{4d} = \frac{hpd}{3 \cdot 4}$; also mus auch sein $\frac{x^2}{d} = \frac{d}{3}$, daher $x^2 = \frac{d^2}{3}$, $x = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}$

Es sei z. B. $d = 8''$, so wird $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ $= \frac{8}{1{,}73x} = \frac{8{,}0000}{1{,}73x} = 4{,}62'' = 4''\ 6'''\ 2''''$.

Dieser Werth ist schon so genau, daß uns eine größere Genauigkeit, wodurch auch die 10tel und 100tel Scrupel ꝛc. um welche noch gefehlt wird, angegeben würden, nichts nuzen würde. Man sieht indessen leichte ein, daß dieser Werth von x um etwas zu groß ist; weil bei fortgesezter Rechnung der Divisor $\sqrt{3} = 1{,}73$ etwas größer gefunden wird. Wenn ich nämlich noch das fehlende Tausendtheil suchen wolte; so würde ich finden $\sqrt{3} = 1{,}731$, und es wird offenbar $\frac{8}{1{,}731} < \frac{8}{1{,}730}$

Löset man die Gleichung $x^2 = \frac{d \cdot d}{3}$ auf in die Proportion $\frac{d}{3} : x = x : d$, so läst sich nach

dieser

dieser Proportion die mitlere Proportionale x zwischen den gegebnen Linien $\frac{d}{3}$ und d durch geometrische Verzeichnung unmittelbar finden.

§. 367.

LXXVIII. Aufgabe.

Einen Cirkel zu beschreiben, dessen Flächenraum der Seitenfläche eines gegebnen Cylinders gleich ist.

§. 368.

Auflösung.

Der Diameter des Cylinders sei $= d$, seine Peripherie $= p$, und die Höhe des Cylinders $= h$; so ist seine Seitenfläche $= hp$ (Num. 58.) der Diameter des verlangten Cirkels sei $= x$: so ist seine Peripherie $= \frac{px}{d}$, sein Flächenraum $= \frac{px^2}{4d}$: also sol sein $\frac{px^2}{4d} = hp$; daher $x^2 = 4hd$, und $x = \sqrt{4hd}$, oder $x = 2\sqrt{hd}$ daher $\frac{x}{2} = \sqrt{hd}$.

Nach dieser Formel ist der Radius des verlangten Cirkels $\left(\frac{x}{2}\right)$ die mitlere Proportionallinie zwischen h und d, indem aus der Proportion $h : \frac{x}{2} = \frac{x}{2} : d$ folgt, daß $\frac{x^2}{4} = hd$, also $\frac{x}{2} = \sqrt{hd}$.

§. 369.

LXXIX. Aufgabe.

Einen Cylinder von einer bestimten Höhe zu machen, welcher einer gegebnen Kugel dem Inhalte nach gleich ist.

§. 370.

Auflösung.

Es sei der Durchmesser der Kugel $= d$, die zu diesem Durchmesser gehörige Peripherie $= p$; so ist der Inhalt der Kugel $\frac{pd^2}{6}$ (Num. 56.). Da nun die Höhe des Cylinders schon bestimt ist, welche $= h$ sei; so mus man ihm die verlangte Größe durch die richtige Annahme der Grundfläche zu geben suchen, welche als eine Cirkelfläche gänzlich durch ihren Diameter bestimt wird. Nent man diesen Diameter x, so wird die dazu gehörige Peripherie $= \frac{px}{d}$, der Flächenraum dieser Cirkelscheibe $= \frac{px^2}{4d}$, daher der Cubikinhalt des ganzen Cylinders, dessen Höhe h ist $= \frac{hpx^2}{4d}$. Sol nun $\frac{hpx^2}{4d} = \frac{pd^2}{6}$ sein; so mus sein $\frac{x^2}{4} = \frac{d^3}{6h}$, daher $\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{d^3}{6h}} = d \cdot \sqrt{\frac{d}{6h}}$

nach

nach welcher Formel sich x als der Radius der gesuchten Grundfläche durch Rechnung finden läßt.

Aus der Gleichung $\frac{x^2}{4} = \frac{d^3}{6h}$ ergiebt sich folgende $x^2 = \frac{2d^3}{3h}$. Um nach dieser Gleichung die Linie x durch geometrische Zeichnung zu finden, so suche man nach der Proportion $3h : 2d = d : L$ die vierte Proportionale $L = \frac{2d^2}{3h}$; so hat man $x^2 = dL$, woraus ferner folget, daß $d : x = x : L$, also x die mitlere Proportionale zwischen d und L ist.

§. 371.

Bei einiger Fertigkeit im Zeichnen wird man also in diesem Falle durch die geometrische Konstruktion allerdings leichter als durch Rechnung zu seinem Zwekke gelangen. Die Berechnung wird aber große Vorzüge behalten, wenn entweder die Linien in den gegebnen Körpern eine solche Größe haben, daß man die Zeichnung nach einem sehr verkleinertem Maße vornehmen müste, wobei denn selbst die kleinen ganz unvermeidlichen Fehler in der Zeichnung schon eine beträchtliche Größe im waren Maße ausmachen würden, oder wenn man überhaupt die gröste Genauigkeit verlangen solte. Denn diese läst sich durch Rechnung so weit treiben als man nur wil; da hingegen bei der Zeichnung die Fertigkeit des Zeichners und die Schärfe seines

Gesichtes der möglichen Richtigkeit sehr trügliche Gränzen sezen.

§. 372.

Wäre in der vorigen Aufgabe (§. 369.) verlangt, daß der Cylinder mit der Kugel von gleicher Höhe, also $h = d$ sein solte; so würde stat der Formel $x^2 = \frac{2d^3}{3h}$ sich folgende Formel $x^2 = \frac{2d^3}{3d} = \frac{2d^2}{3}$ ergeben; so daß nach Vorschrift dieser Formel $x = \sqrt{\frac{2d^2}{3}}$, der Werth von x durch Rechnung in Zahlen und nach der Proportion $\frac{2d}{3} : x = x : d$ der Diameter x als die mitlere Proportionale zwischen $\frac{2d}{3}$ und d durch geometrische Verzeichnung gefunden wird.

§. 373.

LXXX. Aufgabe.

Den Diameter einer Kugel zu finden, welche a Cubikraum enthält.

§. 374.

Wenn d den Diameter und p die Peripherie der verlangten Kugel anzeigt; so ist $\frac{pd^2}{6}$ der Inhalt der Kugel. Folglich mus sein $\frac{pd^2}{6} = a$,

und

und daher $pd^2 = 6a$. In dieser Gleichung ist uns weder p noch d bekant. Man kan aber, weil allemal $100 : 314 = d : p$ ist, stat p schreiben $3,14 . d$, und so erhält man die Gleichung $3,14 . d^3 = 6a$, daher $d^3 = \frac{6a}{3,14}$, und

$$d = \sqrt[3]{\frac{6a}{3,14}} = \sqrt[3]{\frac{600a}{314}}.$$

§. 375.

Es sei der verlangte Kubikinhalt $x = 113,04'''$ so wird $d = \sqrt[3]{\frac{113,04 . 600}{314}} = \sqrt[3]{\frac{67824}{314}} = \sqrt[3]{216}$. Es kömt also nur darauf an, die Kubikwurzel von 216, das ist, diejenige Zahl zu finden, welche dreimal in sich selbst multiplicirt 216 giebt. Versucht man mit 5, so giebt 5.5.5 das Produkt 125, welches zu klein ist. Versucht man aber mit 6; so findet sich, daß 6.6.6 allerdings $= 216$, folglich $\sqrt[3]{216} = 6$ ist. Bei größern oder solchen Zahlen, welche irrationale Kubikzahlen sind, deren Wurzeln sich, wie bei den irrationalen Quadratzahlen, nicht ganz genau angeben lassen, würde man vielleicht sehr viel vergebliche Versuche machen müssen, ehe man auf eine hinlänglich genaue Kubikwurzel käme. Man hat daher auch für die Ausziehung der Kubikwurzel solche ähnliche algemeine Regeln entwikkelt, als wir §. 265. für die

Ausziehung der Quadratwurzel gegeben haben. Die dazu nöthigen Operationen sind aber in der That so mühsam und langwierig, daß ich meine Schüler damit verschonen wil, wenn sie sich desto eifriger bemühen wollen, bald zu einer hinreichenden Kentnis der Logarithmen zu gelangen, wodurch man die Kubikwurzeln sowohl als die Quadratwurzeln mit beliebiger Genauigkeit ungemein leichte finden kan.

§. 376.

Uebrigens läßt sich auf eben die Art wie §. 266. erwiesen wurde, daß $\sqrt[2]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt[2]{q}}$, auch darthun, daß $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{q}}$, und eben so wie §. 280. erwiesen wurde, daß $\sqrt[2]{pq} = \sqrt[2]{p}\,\sqrt[2]{q}$ sei, auch erweisen, daß $\sqrt[3]{pq} = \sqrt[3]{p}\,\sqrt[3]{q}$ ist.

§. 377.

LXXXI. Aufgabe.

Die Seite eines Kubus zu finden, welcher noch einmal so groß als ein gegebner Kubus ist, dessen Seite = 3'.

§. 378.

Auflösung.

Der Inhalt eines Kubus, dessen Seite x ist, ist x^3; der Inhalt des gegebnen Kubus ist $(3)^3$ das ist 27. Sol nun $x^3 = 2.27$ sein; so mus offenbar auch $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{2.27}$, das ist, $x = \sqrt[3]{54}$ sein.

Es komt also darauf an, eine Zahl zu finden, welche 3mal mit sich selbst multiplicirt 54 giebt. 3 ist zu klein, indem 3.3.3 nur 27 giebt, und 4 ist schon zu groß, indem 4.4.4 schon 64 giebt. Der Bruch 3,77 aber kan als die irrationale Kubikwurzel von 54 ohne sehr merklichen Fehler angenommen werden.

§. 379.

LXXXII. Aufgabe.

Man sol ein Parallelipipedum machen, welches 125‴ enthält, dergestalt daß seine Länge AB (Fig. 22.) noch einmal so groß ist, als seine Breite AC, und seiue Breite noch einmal so groß ist, als seine Höhe AD.

§. 380.

Auflösung.

Es sei die Zahl der Höhe AD = x, so ist die Zahl der AC = 2x, der AB = 4x, der Inhalt der Parallelipipedums = $x \cdot 2x \cdot 4x = 8x^3$.

Sol

Sol nun $8x^3 = 125$ sein, so mus $x^3 = \frac{125}{8}$ und

$x = \sqrt[3]{(125:8)} = \sqrt[3]{125} : \sqrt[3]{8} = 5:2 = 2\frac{1}{2}$ sein.

§. 381.

LXXXIII. Aufgabe.

Das Verhältnis zu finden, worin die Umfläche einer Kugel mit der Umfläche eines Cylinders steht, dessen Inhalt dem Inhalte der Kugel, und dessen Grundfläche einer grösten Cirkelscheibe der Kugel gleich ist.

§. 382.

Auflösung.

Wenn der Diameter der Kugel d, und die Peripherie einer ihrer grösten Cirkelscheiben p genant wird; so ist die Höhe des beschriebnen Cylinders $= \frac{2d.}{3}$ (Num. 56.)

Die Umfläche der Kugel ist $= pd$ (Num. 57.), die Seitenfläche des Cylinders $= \frac{2dp}{3}$, eine jede von seinen beiden Grundflächen $= \frac{pd}{4}$, daher die ganze Umfläche des Cylinders $= \frac{2dp}{3} + \frac{pd.}{2}$

Es

Es ist demnach $pd : \frac{2pd}{3} + \frac{pd}{2}$ gleich dem Verhältnisse der Kugelumfläche zur Cylinderumfläche. Damit man aber dis Verhältnis vermittelst derer im sechsten Kapitel erwiesenen Lehrsäze, so einfach als möglich ist, ausdrükken könne, so seze man dis Verhältnis $= k : c$, dergestalt,

daß $pd : \frac{2pd}{3} + \frac{pd}{2} = k : c$,

das ist, $pd : \frac{(4+3)\,pd}{6} = k : c$ ist;

so wird auch (§. 191.) $6pd : (4+3)\,pd = k : c$,

daher auch (§. 193.) $6 : 7 = k : c$

oder $1 : \frac{7}{6} = k : c$ sein.

Auf diese Weise haben wir gefunden, daß die Umfläche eines Cylinders, wie hier in der Aufgabe beschrieben ist, um $\frac{1}{6}$ größer ist als die Umfläche der Kugel. Wenn daher z. B. die Umfläche einer Kugel 42□′ beträgt; so enthält die Umfläche eines solchen Cylinders, welcher mit dieser Kugel einerlei Peripherie und Inhalt hat, 49□′.

§. 383.

LXXXIV. Aufgabe.

Einen gegebnen Kegel durch eine mit der Grundfläche parallel laufende Fläche in zwei gleiche Theile zu zerschneiden.

§. 384.

Auflösung.

Der obere Theil wird offenbar ein Kegel werden. Wenn wir daher (Fig. 23.) die erforderliche Höhe dieses abzuschneidenden Kegels CE $= x$ und seine Grundfläche $= y$, die Höhe des ganzen gegebnen Kegels CD aber $= h$, und seine Grundfläche $= g$ sezen, so wird nach der Aufgabe verlangt, daß $\frac{yx}{3} = \frac{hg}{6}$, oder $yx = \frac{hg}{2}$ gemacht werde. Diese Gleichung hat zwei unbekante Größeu, nämlich x und y, indessen geben uns einige bekante geometrische Lehrsäze folgende Proportionen an die Hand.

Es ist $CD : CE = AD : FE$

folglich auch $CD^2 : CE^2 = AD^2 : FE^2$

nun ist aber $g : y = AD^2 : FD^2$ (49.)

folglich auch $CD^2 : CE^2 = g : y$

das ist $h^2 : x^2 = g : y$ folglich

$$y = \frac{gx^2}{h^2}.$$

Wird dieser Werth von y in die obige Gleichung $yx = \frac{hg}{2}$ geschrieben; so erhält man $\frac{gx^3}{h^2} = \frac{hg}{2}$, daher $x^3 = \frac{h^3}{2}$, und $x = \sqrt[3]{\frac{h^3}{2}} = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

§. 385.

Solte der Kegel dergestalt geschnitten werden, daß sich der ganze Kegel ACB zum obern abgeschnittenen Kegel FCG verhielte, wie m : n; da hingegen sich in der vorigen Aufgabe ACB zu FCG verhalten muste, wie 2 : 1; so müste bei denselben Bedeutungen von g, h, y, x, gemacht werden $\frac{yx}{3} : \frac{hg}{3} = m : n$, folglich $nyx = hgm$ sein. Und da offenbar bei einem jeden Werthe des Verhältnisses m : n alle diejenigen Proportionen unverändert richtig bleiben, nach welchen in der vorigen Auflösung der Werth von y, aus g, h und x bestimt wurde; so wird auch jezt $y = \frac{gx^2}{h^2}$ bleiben; also, indem dieser Werth in die Gleichung $nyx^3 = hgm$ geschrieben wird, sich ergeben, daß $\frac{nyx^3}{h^2} = hgm$, daher $x^3 = \frac{h^3m}{n}$, und $x = h\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$ sein müsse.

Sechs-

Sechszehntes Kapitel.

Vermischte Aufgaben.

§. 386.

LXXXV. Aufgabe.

Ein Bote geht von einem Orte L aus, und legt jeden Tag a Meilen zurük. Nach b Tagen wird ihm ein anderer, der täglich c Meilen gehen wil, von dem Orte *l* nachgeschikt, welcher Ort *l* von dem andern L um e Meilen nach dem Orte G zu, wohin der erste Bote gehet, entfernt ist. Nach wie viel Tagen und wie weit von *l* wird der zweite Bote den ersten einholen?

§. 387.

Vorbereitung.

Die 24. Figur kan zur Versinlichung der ganzen Aufgabe dienen. L und *l* sind die beiden Oerter, aus welchen die Boten ausgehen, und der Weg *l*g fält eigentlich genau in die Linie LG, so daß auch g in G fält, welches der Ort ist, nach welchem beide Boten ihren Weg richten. O stelt den Punkt vor, wo der erste Bote vom zweiten eingeholt wird, ꝛc.

§. 388.

Auflösung.

Wenn der lezte Bote x Tage gehet bis er den ersten Boten einholet; so ist der erste Bote, der b Tage

Tage eher ausgegangen ist, schon b + x Tage unterwegens, bis er eingeholt wird. In x Tagen ist der zweite Bote cx Meilen, und in b + x Tagen der erste Bote a (b+x) Meilen gegangen, also mus $lO = cx$ Meilen, und $LO = a(b+x)$ Meilen sein. Nach der Figur fält in die Augen,

daß $lO + lL = LO$

das ist $cx + e = ab + ax$ sei. Folglich

ist auch $cx - ax = ab - e$

$$(c-a)x = ab - e$$

$$x = \frac{ab - e}{c - a}$$

§. 389.

Durch diese Formel wird x als die Zeit, nach welcher der zweite Bote den ersten einholet, aus den bekanten Größen a, b, c, e, bestimt. Da nun $lO = cx$, so legt folgende Formel $lO = c \cdot \frac{ab - e}{c - a}$ auch sogleich die Verbindung vor Augen, worin die Zahl der Entfernung, in welcher von l aus gerechnet der erste Bote eingeholet wird, mit den Zahlen der Größen a, b, c, e stehet.

§. 390.

Es sei $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $e = 10$, so wird $x = (4 \cdot 3 - 10) : (5 - 4) = 2$ und $lO = 10$. Der erste Bote ist also, bis er eingeholt wurde, x + b, das ist, 5 Tage gegangen,

und da er jeden Tag 4 Meilen gehet, so hat er in diesen 5 Tagen 20 Meilen = L O zurükgelegt, und es müssen hienach allerdings die beiden Boten zu gleicher Zeit in O sein.

§. 391.

Würde der zweite Bote aus demselben Orte L nachgeschikt, so wird in der ganzen Aufgabe weiter nichts verändert, als daß die Entfernung e = Ll in diesem Falle = 0 wird. Folglich mus die herausgebrachte Formel auch für diesen Fal gelten, wenn wir nur allenthalben stat e, 0 schreiben. Wir erhalten dadurch $x = \frac{ab}{c - a}$

§. 392.

Wäre nun z. B. wie vorhin gegeben a = 4, b = 3, c = 5; so müste nunmehro der zweite Bote x = (4.3) : (5 — 4) = 12 Tage gehen, bis er den ersten einholte. In diesen 12 Tagen geht er 5.12, das ist 60 Meilen; der erste Bote, welcher 3 Tage früher ausgegangen, ist alsdann 15 Tage unterweges, und ist 4.15, also ebenfals 60 Meilen zu eben der Zeit von L entfernt, wird daher in diesem Augenblikke allerdings vom zweiten Boten eingeholet.

§. 393.

Fiele endlich der Ort, wovon der zweite Bote ausgeht, auf die andre Seite in λ, so müste die Ent-

Entfernung $l\lambda$ in Rüksicht auf einen Boten, der in gerade entgegengesezter Richtung von l nach G zu einen Weg macht, welcher mit + bezeichnet wird, nothwendig mit — bezeichnet werden. Wenn aber das Zeichen von e in der ersten Grundgleichung in das entgegengesezte verändert wird, so wird auch in der daraus hergeleiteten Formel die Zahl e gerade entgegengesezt bezeichnet sein, und die §. 388. gefundene Formel wird sich für diesen Fal abändern in folgende $x = \frac{ab+e}{c-a}$.

Wenn wiederum gegeben würde a = 4, b = 3, c = 5, e = 10; so würde nunmehro x = (12 + 10) : (5 — 4) = 22 Tage gefunden.

§. 394.

LXXXVI. Aufgabe.

Ein Goldschmid hat 14löthiges und 11löthiges Silber, und wil aus beiden 8 Mark 12löthiges Silber zusammen mischen: wie viel mus er von jeder Sorte nehmen?

§. 395.

Auflösung.

Eine Mark hält 16 Loth. Vierzehnlöthiges Silber heist eine aus Silber und Kupfer dergestalt vermischte Masse, daß immer eine Mark dieser Masse 14 Loth Silber und 2 Loth Kupfer enthält. Eilflöthig heist diese Vermischung, wenn davon

eine Mark nur 11 Loth Silber und also 5 Loth Kupfer enthält. Sezt man nun, daß von dem 14löthigen Silber x Mark, von dem 11löthigen also 8 — x Mark zur verlangten Mischung genommen werden; so enthalten die x Mark vom 14löthigen Silber offenbar 14 x Loth Silber, die 8 — x Mark von 11löthigen aber 11 (8 — x) Loth Silber. Da die verlangte Mischung von 8 Mark 12löthig sein sol, so mus in derselben überhaupt 12 . 8 Loth Silber enthalten, und daher

$$14x + 11(8 - x) = 12 . 8,$$

das ist $14x + 88 - 11x = 96$

daher $3x = 8$ und $x = \frac{8}{3}$ sein.

Antw. Von dem 14löthigen Silber müssen $\frac{8}{3}$ Mark, von dem 11löthigen also die übrigen $\frac{16}{3}$ Mark genommen werden. Nun werden diese $\frac{8}{3}$ Mark vierzehnlöthigen Silbers $\frac{14 . 8}{3}$ Loth Silber und die $\frac{16}{3}$ Mark eilflöthigen Silbers $\frac{11 . 16}{3}$ Loth Silber, also die ganze Masse der Vermischung $\frac{14 . 8}{3} + \frac{11 . 16}{3}$ Loth, das ist 96 Loth Silber, folglich eine jede Mark dieser Vermischung 12 Loth Silber enthalten, wie verlangt wurde.

§. 396.

§. 396.
LXXXVII. Aufgabe.

Durch 2 Röhren, welche ununterbrochen und beständig gleich stark laufen, fliest Wasser in ein Gefäß. 1) Das Wasser, welches aus der ersten Röhre in a Stunden ausfliest, macht mit demjenigen, welches aus der zweiten Röhre in b Stunden fliest n Maß. Läst man aber 2) die erste Röhre c Stunden und die zweite Röhre d Stunden laufen; so erhält man m Maß. Wie viel Maß laufen in Einer Stunde aus jeder Röhre?

§. 397.
Auflösung.

Es sei x die Zahl der Maße, welche aus der ersten Röhre in einer Stunde, y die Zahl der Maße, welche aus der zweiten Röhre in einer Stunde ausfließen; so fliest aus der ersten Röhre in a Stunden ax Maß, aus der zweiten Röhre in b Stunden by Maß, daher ist I) $ax + by = n$.

Eben so wird aus der ersten Röhre in c Stunden cx Maß, aus der zweiten Röhrr in d Stunden dy Maß ausfließen, und daher sein II) $cx + dy = m$. Wir haben demnach folgende zwei Gleichungen aufzulösen

I) $ax + by = n$. II) $cx + dy = m$.

Aus der Gleichung bei I) folgt $x = \frac{n - by}{a}$.

Schreibt man nun stat eines jeden in der Gleichung

bei II) vorkommenden x diesen Werth von x, so mus man nothwendig eine Gleichung erhalten, in welcher kein x, sondern nur noch die andere unbekante Zahl y anzutreffen ist, nämlich

$$c\left(\frac{n-by}{a}\right)+dy=m$$

das ist $\frac{cn-bcy}{a}+dy=m$

$$cn-bcy+ady=am$$

$$ady-bcy=am-cn$$

$$(ad-bc)y=am-cn$$

$$y=\frac{am-cn}{ad-bc}$$

§. 398.

Sobald nun a, b, c, d, n, m, in bestimten Zahlen gegeben sind; so läst sich nach der Vorschrift dieser algemeinen Formel auch y in einer bestimten Zahl angeben, und indem man alsdenn diesen gefundnen Werth von y stat y in eine von den beiden Grundgleichungen schreibt, auch der Werth von x berechnen. Wolte man aber auch für die x eine solche algemeine Formel haben, als wir für die y gefunden haben; so darf man nur auch diesen algemeinen Werth von y in eine von den beiden Grundgleichungen, z. B. in die Gleichung I) $ax+by=n$, stat eines jeden darin vorkommenden y schreiben; so erhält man

ax

$$ax + b.\left(\frac{am - cn}{ad - bc}\right) = n$$

daher $ax = n - b.\left(\frac{am - cn}{ad - bc}\right)$

das ist $ax = n \frac{- abm + bcn}{ad - bc}$

$$ax = \frac{n(ad - bc) - abm + bcn}{ad - bc}$$

$$ax = \frac{and - bcn - abm + bcn}{ad - bc}$$

$$ax = \frac{and - abm}{ad - bc}$$

$$x = \frac{nd - bm}{ad - bc}$$

§. 399.

Es sei $a = 4$, $b = 7$, $n = 26$, $c = 5$, $d = 6$, $m = 27$; so wird

$x = (156 - 189) : (24 - 35) = - 33 : - 11 = 3$
$y = (108 - 130) : - 11 = - 22 : - 11 = 2$

§. 400.

Wäre gegeben $a = 6$, $b = 4$, $n = 22$, $c = 9$, $d = 7$, $m = 31$, so würde $x = (22 . 7 - 31 . 4) : (6 . 7 - 4 . 9) = (154 - 124) : (42 - 36) = 30 : 6 = 5$: folglich durch die erste Röhre in einer Stunde 5 Maß Wasser in das

Gefäß eingeflossen sein. Ferner wird $y = (6 . 13 - 22 . 9) : 6 = (186 - 198) : 6 = - 12 : 6 = - 2$. Dieser negative Werth von y kan nichts anders bedeuten, als daß aus der zweiten Röhre nicht nur nichts in das Gefäß eingeflossen ist, denn $- 2$ kan nicht einerlei bedeuten mit 0, sondern sogar 2 Maß aus dem Gefäße in jeder Stunde herausgeflossen sind. Wir müssen uns daher diese ganze Sache folgendermaßen vorstellen. Durch die eine Röhre fliest in ein Gefäß stündlich 5 Maß Wasser hinein, welches zum Theil aus einer andern kleinern Röhre am Boden des Gefäßes, welche stündlich 2 Maß Wasser von sich giebt, wieder ausfliest. Nachdem nun die obere Röhre 6, die untere 4 Stunden gelaufen ist; so mus sich allerdings $30 - 8$, das ist, 22 Maß Wasser, und nach dem zweiten Versuche, wo die obere Röhre 9, die untere 7 Stunden gelaufen ist, allerdings $45 - 14$, das ist, 31 Maß Wasser im Gefäße befinden.

§. 401.

LXXXVIII. Aufgabe.

Ein Hase hat jezt 80 Sprünge vor einem Hunde voraus. Der Hund thut 7 Sprünge, indem der Hase nur 5 thut, und der Hund komt mit 2 Sprüngen eben so weit, als der Hase mit 3 Sprüngen: wie viel Sprünge hat der Hase noch zu thun, bis er vom Hunde eingeholet wird.

§. 402.

Auflösung.

Man seze die Weite eines Hasensprunges $= y$, so ist die Weite eines Hundesprunges $= \frac{3}{2} . y$. Die Zahl der Sprünge, welche der Hase noch zu thun hat, sei x, so ist $\frac{7}{5} . x$ die Zahl der Sprünge, welche der Hund in eben der Zeit thut. Der Hase legt durch x Sprünge die Weite xy, der Hund durch seine $\frac{7}{5} . x$ Sprünge die Weite $\frac{7}{5} x . \frac{3}{2} y$ zurük. Da nun der Hase schon 88 Sprünge voraus, und durch diese 88 Sprünge die Weite 88 y voraus hat; so mus

1) $\frac{7}{5} x . \frac{3}{2} y = xy + 88 y$

2) $\frac{21 xy}{10} = xy + 88 y$

folglich auch, nachdem die ganze Gleichung durch y dividirt worden,

3) $\frac{21 x}{10} = x + 88$

4) $21 x = 10 x + 880$

5) $11 x = 880$

6) $x = 80$ sein.

Antwort. Der Hase hat noch 80 Sprünge zu thun, bis er vom Hunde eingeholt wird.

§. 403.

Daraus, daß y aus der ganzen Gleichung ganz und gar ausgefallen ist, können wir schließen, daß die Größe dieser Weite in die Bestimmung

des x gar keinen Einflus hat. Denn wenn die Gleichung bei 3) bei irgend einem Werthe von x bestehet; so mus bei demselben Werthe von x auch die bei 2) bestehen können, was für einen Werth auch y haben mag; und umgekehrt. Es komt in der That hier blos auf die Verhältnis der beiden Sprünge gegen einander, und gar nicht auf die eigentliche Länge des einen Sprunges an. Sezen wir nun nach Belieben z. B. daß die Länge eines Hasensprunges y, 2 Ellen betrage; so hat der Hase anjezt 176 Ellen voraus. In denen 80 Sprüngen, die er noch zu thun hat, komt er noch 160 Ellen weiter; so daß er überhaupt 336 Ellen weit von dem Orte, wo der Hund sich anjezt befindet, eingeholt würde. Während der Zeit, daß der Hase 80 Sprünge thut, macht der Hund $\frac{7}{5}$. 80, daß ist, 112 Sprünge, und da immer der Hund in 2 Sprüngen so weit, als der Hase in 3 Sprüngen, folglich mit einem Sprunge $\frac{3}{2}$. y, das ist, 3 Ellen weit springt, so legt er in dieser Zeit allerdings 112 . 3 = 336 Ellen zurük, und trift am Ende dieser Weite zugleich mit dem Hasen ein.

§. 404.

LXXXVIII. Aufgabe.

Ein Man verläst ein Vermögen von 1200 Rthlr. und folgendes Vermächtnis. Wenn meine Frau mit einem jungen Sohne niederkommen solte, so sol die Mutter 400 Rthlr. der Sohn 800 Rthlr. haben,

haben, wenn sie aber mit einer Tochter niederkommen solte, so sol die Mutter 900 Rthlr. die Tochter 300 Rthlr. haben. Die Frau bekomt aber zugleich einen Sohn und eine Tochter. Wie viel sol nach dem Willen des Vaters nunmehro ein jeder von der Erbschaft bekommen?

§. 405.

Auflösung.

Man pflegt hiebei gewöhnlich folgendermassen zu schließen. Da der Verstorbne für die Mutter 800, für den Sohn 400 bestimt hat; so sol sich nach seinem Willen das Erbtheil der Mutter zum Erbtheile des Sohnes verhalten, wie 2 : 1, hingegen das Erbtheil der Mutter zum Erbtheile der Tochter, wie 3 : 1, indem sich 900 zu 300 verhält, wie 3 : 1. Wird daher das Erbtheil der Mutter $= m$, das Erbtheil des Sohnes $= s$, folglich das Erbtheil der Tochter $= 1200 - m - s$ gesezt; so sol sein $m : s = 1 : 2$; folglich mus $m = \frac{s}{2}$, und wenn $m : 1200 - m - s = 3 : 1$ sein sol, $m = 3600 - 3m - 3s$, daher $4m = 3600 - 3s$, und $m = 900 - \frac{3}{4}s$ sein. Folglich wird auch $\frac{s}{2} = 900 - \frac{3}{4}s$

und $\frac{5}{4}s = 900$

daher $s = 720$

und $m = \frac{s}{2} = 360$

und $1200 - s - m = 120$

§. 406.

Nach dieser Vertheilung verhält sich nun allerdings 360 : 720 = 1:2, und 720:120 = 3:1, und diese beiden vom Verstorbnen angegebnen Verhältnisse sind völlig beobachtet. Aber der Testator selbst würde diese Vertheilung wohl nur in dem Falle billigen, wenn er sich beständig gewöhnt hätte, nach den Regeln der geometrischen Verhältnisse deutlich zu denken, nach welchen die Zahlen bisweilen so ungemein stark, bisweilen aber nur sehr wenig ab- und zunehmen. Um mit aller Billigkeit zu verfahren, müste man noch ausmachen, ob nicht bei solchen Testamenten mehr nach dem arithmethischen als geometrischen Verhältniß bestimt würde, und ganz andere Gründe zur Entscheidung entwikkeln, wonach auch auf die Verhältnis der beiden Erbtheile des Sohnes und der Tochter gegeneinander Rükſicht genommen würde, welches in der angegebnen Auflösung nicht geschieht.

§. 407.

XC. Aufgabe.

Es hat jemand auf 2 Kornböden Getraide liegen. Er weis nur so viel, daß 1) auf dem ersten Boden 30 Scheffel Roggen, 20 Scheffel Gersten und 10 Scheffel Waizen liegen, welche zusammen 230 Rthlr. werth sind, daß 2) auf dem zweiten Boden 15 Scheffel Roggen, 6 Scheffel Gersten und 12 Scheffel Waizen liegen, welche nach eben

dem

dem Preise 138 Rthlr. werth sind, und daß er 3) nach demselben Preise schon 10 Scheffel Roggen, 5 Scheffel Gersten und 4 Scheffel Waizen für 75 Rthlr. abgelassen habe. Wie viel kostet ein Scheffel von jeder Getraideart.

§. 408.

Auflösung.

Man seze, daß ein Scheffel Roggen x Rthlr. ein Scheffel Gersten y Rthlr. und ein Scheffel Waizen z Rthlr. koste; so ist

1) $30x + 20y + 10z = 230$

2) $15x + 6y + 12z = 138$

3) $10x + 5y + 4z = 75$

Aus 1) folgt $x = \frac{230 - 20y - 10z}{30}$,

Schreibt man diesen Werth von x stat eines jeden in der Gleichung bei 2) sich findenden x; so erhält man

2) $15 \cdot \left(\frac{230 - 20y - 10z}{30}\right) + 6y + 12z = 138$

das ist $115 - 10y - 5z + 6y + 12z = 138$

oder $-4y + 7z = 23$, eine Gleichung, worin kein x mehr anzutreffen ist, und aus welcher sich ergiebt

$$y = \frac{7z - 23}{4}$$

Schreiben wir in die Gleichung bei 3) stat x den gefundnen durch y, z und bekante Zahlen bestimten Werth;

Werth; so erhalten wir

$$3) \; 10 \cdot \left(\frac{230 - 20y - 10z}{30}\right) + 5y + 4z = 75$$

$$230 - 20y - 10z + 15y + 12z = 225$$

$$-5y + 2z = -5$$

$$5y - 2z = 5$$

und wenn wir nun noch in dieser Gleichung stat y den vorhin gefundenen Werth für y schreiben, wodurch y aus der unbekanten Zahl z und aus bekanten Zahlen bestimt wurde; so ergiebt sich

$$5 \cdot \left(\frac{7z - 23}{4}\right) - 2z = 5$$

oder $35z - 115 - 8z = 20$

woraus folget $z = \frac{135}{27} = 5$ Rthlr.

Also $y = \frac{7z - 23}{4} = \frac{35 - 23}{4} = 3$ Rthl.

und $x = \frac{230 - 20y - 10z}{30} = \frac{230 - 60 - 50}{30} =$

$\frac{120}{30} = 4$ Rthlr.

§. 410.

XCI. Aufgabe.

Die Höhe eines gleichseitigen Dreieks aus der gegebnen Seite s durch einen algebraischen Ausdruk zu bestimmen.

§. 410.

Auflösung.

Es sei Fig. 25. die Seite AB = BC = AC = s, die gesuchte Höhe AD = y; so ist AD = $\frac{s}{2}$, und $AD^2 = AB^2 - AD^2$, d. i. $y^2 = s^2 - \frac{s^2}{4}$, das ist $y^2 = \frac{3s^2}{4}$, daher $y = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{s\sqrt{3}}{2}$.

§. 411.

XCII. Aufgabe.

Die Seite eines gleichseitigen Dreieks zu finden, welches einem Dreiek ABC (Fig. 26.) gleich ist, dessen Grundlinie AC = b und Höhe BD = p gegeben sind.

§. 412.

Auflösung.

Die Seite des verlangten gleichseitigen Dreieks sei = x; so ist die Höhe desselben (§. 410.) $= \frac{x\sqrt{3}}{2}$; also $\frac{x\sqrt{3}}{4} \cdot x$ oder $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ der Inhalt desselben, welcher dem Inhalte des gegebnen Triangels $\frac{bp}{2}$ gleich sein sol, also mus $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{bp}{2}$, folglich $x^2 = \frac{2bp}{\sqrt{3}}$ sein.

§. 413.

Um nach dieser Formel die Linie x geometrisch zu finden, nehme man eine Linie von beliebiger

Größe

Größe z. B. FD (Fig. 27.) zur Einheit an, mache DH = 3 FD = 3.1., beschreibe über FH einen halben Zirkelkreis, und ziehe die Normallinie DI so ist, weil FD : DI = DI : DH ist, DI^2 = FD . DH = 1.3, also DI = $\sqrt{3}$. Macht man ferner DB = p, DL = 2FD und zieht BG ≈ IL; so ist ID : BD = DL : DG, folglich $DG = \frac{BD : DL}{ID} = \frac{2p.}{\sqrt{3}}$ Man mache ferner noch DK = b, beschreibe über GK einen halben Zirkel, und ziehe die Normallinie DN,

so ist GD : DN = DN : DK

d. i. $\frac{2p}{\sqrt{3}} : DN = DN : b$

folglich $DN^2 = \frac{2bp}{\sqrt{3}} = x^2$, also DN die verlangte Seite.

§. 414.

Man giebt gewöhnlich folgende geometrische Konstruktion dieser Aufgabe an.

Mit des gegebnen Triangels ABC Basis AC (Fig. 28.) beschreibe man einen gleichseitigen △ ACE, ziehe die Parallele BG, beschreibe über AE einen halben Zirkelkreis, und ziehe aus G die Normale y; so ist x die Seite des verlangten gleichseitigen Triangels.

§. 415.

XCIII. Aufgabe.

Durch den algebraischen Kalkul zu finden, ob die angegebne Konstruktion richtig sei.

§. 416.

Auflösung.

Da nach der §. 414. angegebnen Verzeichnung gemacht ist $AGH = AHE$ ($= R$) folglich weil $n + r = n + m$ ($= R$) auch $r = m$ ist, so ist, (Num. 38.) $\Delta AHE \backsim \Delta AHG$, also

$$AE : AH = AH : AG$$

daher $AH^2 = AE \cdot AG$

oder wenn $AE = AC$, als die gegebne Basis, $= b$ und AH als die vermuthliche gesuchte Seite $= x$ gesezt wird

$$x^2 = b \cdot AG.$$

Um daher zu beurtheilen, ob x den richtigen Werth erhalten habe; so mus noch der Werth bestimt werden, welchen AG in der Konstruktion erhält. Es ist aber

$$EF : GK = EA : GA,$$

oder, da $GK = BD = p$ und nach (§. 410.) $EF = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ und $EA = b$ ist,

$$\frac{b\sqrt{3}}{2} : p = b : GA$$

daher $GA = \frac{2pb}{b\sqrt{3}} = \frac{2p.}{\sqrt{3}}$

Diesen Werth von GA in die obige Gleichung $x^2 = b \cdot AG$ geschrieben, erhalten wir $x^2 = \frac{2bp}{\sqrt{3}}$, daher $x = \sqrt{\frac{2bp}{\sqrt{3}}}$.

Aus der vorigen Auflösung §. 412. wissen wir nunmehro schon, daß dis der richtige Werth von x ist. Gesezt aber, dieser Werth sei uns noch nicht so bekant, so können wir nur ferner untersuchen, ob ein gleichseitiges Dreiek, dessen eine Seite BC = $\sqrt{\frac{2bp}{\sqrt{3}}}$ genommen wird = $\frac{pb}{2}$ sei, auf folgende Weise.

Wenn man in dem gleichseitigen Dreiekke, Fig. 25. die eine Seite AB = $\sqrt{\frac{2bp}{\sqrt{3}}}$ sezt; so wird (§. 410.) die Höhe desselben AD = $\sqrt{\frac{2bp}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2bp}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3}$, also der Inhalt desselben allerdings = $\frac{1}{2}$ AD . BC = $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2bp}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2bp}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{2bp}{\sqrt{3}} = \frac{bp}{2}$ sein.

§. 417.

§. 417.

XCIV. Aufgabe.

Den Diameter einer Kugel zu finden, deren Umfläche halb so groß ist, als die Umfläche einer gegebnen Kugel.

§. 418.

Auflösung.

Die gegebne Kugel sei K, ihr Durchmesser D und ihre Peripherie P, so ist ihre Umfläche $=$ PD.

Die gesuchte Kugel sei k, ihr Durchmesser d, ihre Peripherie p, so ist ihre Umfläche $=$ pd.

Wenn nun PD $=$ 2pd, das ist (Num. 34.) $3,14 . D^2 = 2 . 3,14 . d^2$ sein sol; so mus $D^2 = 2d^2$, daher $d = \frac{D}{\sqrt{2}}$ sein.

§. 419.

XCV. Aufgabe.

Das Verhältnis zu finden, worinnen die Umflächen zweier Kugeln stehen, welche sich verhalten wie m : n.

§. 420.

Auflösung.

K sei die eine Kugel, D ihr Diameter, P ihre Peripherie, daher ihre Umfläche V $=$ PD.

k sei die andere Kugel, d ihr Diameter, p ihre Peripherie; daher ihre Umfläche $v = pd$; so ist, da sich verhalten sol

$K : k = m : n$, und

allemal $K : k = \frac{1}{6} PD^2 : \frac{1}{6} pd^2$ ist

auch $m : n = \frac{1}{6} PD^2 : \frac{1}{6} pd^2$

das ist $m : n = PDD : pdd$;

$m : n$ ist demnach aus den beiden Verhältnissen $PD : pd$ und $D : d$ zusammengesezt, und da $PD : pd = V : v$ ist; so ist auch §. 308.

$$m : n = VD : vd$$

folglich auch $\frac{m}{D} : \frac{n}{d} = \frac{VD}{D} : \frac{vd}{d}$ (§. 193.)

das ist $\frac{m}{D} : \frac{n}{d} = V : v$ (*)

oder auch $\frac{mDd}{D} : \frac{ndD}{d} = V : v$

das ist $md : nD = V : v$.

§. 421.

(*) Nach dieser Proportion ist $V : v$ zusammengesezt aus beiden Verhältnissen $m : n$ und $\frac{1}{D} : \frac{1}{d}$. Da nun $\frac{1}{D} : \frac{1}{d} = d : D$; so kan ich auch sagen, daß $V : v$ aus den beiden Verhältnissen $m : n$ und $d : D$ zusammengesezt ist: hierüber pflegt man sich gewöhnlich so auszudrükken, daß man sagt, $V : v$ sei aus dem geraden Verhältnisse $m : n$ und dem umgekehrten Verhältnisse $D : d$ zusammengesezt.

§. 421.

Aus der lezten Proportion sehen wir, daß das Verhältnis V : v von dem Verhältnisse d : D mit abhängt, und nicht eher ganz deutlich angegeben werden kan, als bis auch dis Verhältnis für den Fal, da sich die beiden Kugeln verhalten wie m : n deutlich entwikkelt oder folgende Aufgabe aufgelöset ist.

§. 422.

XCVI. Aufgabe.

Aus dem gegebnen Verhältnisse m : n zweier Kugeln K und k das Verhältnis ihrer Durchmesser D : d zu bestimmen.

§. 423.

Auflösung.

Es ist $K : k = D^3 : d^3$, folglich auch $m : n = D^3 : d^3$; daher auch (§. 312.) $\sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n} = D : d$.

§. 424.

Wird nun in die (§. 421.) gefundene Proportion

$$V : v = md : nD$$

stat d : D das gleiche Verhältnis $\sqrt[3]{n} : \sqrt[3]{m}$ geschrieben; so erhält man

$$V : v = m\sqrt[3]{n} : n\sqrt[3]{m}, \text{ oder}$$

$$V : v = m\sqrt[3]{\frac{n}{m}} : n.$$

§. 425.

Wäre daher gegeben $m:n = 2:1$; so würde

$$V:v = \frac{2\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}} : 1 = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} : 1 = 2 : \sqrt[3]{2}.$$

Da nun ohngefähr $\sqrt[3]{2} = 1,259$ ꝛc. ist; so sehen wir hieraus, daß die Umfläche einer Kugel k, welche nur halb so groß ist als K, mehr als die Hälfte der Umfläche von K beträgt. Wird gegeben $m:n = 16:1$, so wird $V:v = 16 \cdot \frac{1}{4} : 1 = 4:1$, also die Umfläche einer Kugel k, welche 16 mal so klein ist als K, nur 4 mal kleiner sein als die Umfläche von K.

§. 426.

XCVII. Aufgabe.

Ein Rechtek zu verzeichnen, dessen Perimeter $= P''$ und dessen Flächenraum $= F^{\square''}$ sei.

Vorbereitung.

Zwei aneinander liegende Seiten eines Rechtekkes machen den halben Perimeter aus. Sezen wir daher die eine von solchen zwei Seiten, welche man zugleich auch als die Basis ansehen kan, $= x$, so mus die andere Seite, oder die Höhe, $= \frac{P}{2} - x$ sein. Der Flächenraum dieses Rechtekkes beträgt alsdan $x\left(\frac{P}{2} - x\right)^{\square''}$; so daß nach den Forderungen unserer Aufgabe x dergestalt zu nehmen ist,

daß

daß $x\left(\frac{P}{2}-x\right)\square'' = F\square''$, also überhaupt $x\left(\frac{P}{2}-x\right) = F$ werde.

Der Flächenraum von $F\square''$ kan allemal durch ein Quadrat angegeben werden, dessen Seite, welche f heissen sol, so groß genommen wird, daß $ff = F$ wird. Wenn wir nun noch der Bequemlichkeit wegen $P = p$ sezen; so haben wir

§. 427.

Auflösung.

folgende Gleichung $x(p-x) = ff$ aufzulösen.

das ist $px - x^2 = f^2$

daher $x^2 - px = -f^2$

daher $x = \frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right)}$

§. 428.

Berechnung in Zahlen.

Es sei $F = 9\square''$, $P = 20''$; so ist $f = 3''$, $p = 10''$, folglich $x = 5 \mp \sqrt{\frac{100}{4} - 9} = 5 \mp \sqrt{16} = 5 \mp 4$, und es kan genommen werden entweder 1) die Basis $x = 9''$; in dem Falle bleibt für die anliegende Seite oder Höhe $p - x$ noch $10 - 9 = 1''$ übrig: oder es kan genommen werden die Basis $x = 5 - 4 = 1''$, in welchem Falle die Höhe $p - x = 10 - 1 = 9''$ wird. In beiden Fällen erhalten wir ein Rechtek, dessen Qua-

dratinhalt = 9□″ und dessen ganzer Perimeter = 20″ ist.

§. 429.

Bestimmung dieser Aufgabe.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Aufgabe nicht bei allen Werthen der Grössen P und F mög-möglich bleiben kan. Wie wäre es z. B. wohl möglich, ein Rechtek anzugeben, dessen Inhalt 100□″ und dessen Perimeter etwa nur 4″ sein solte. Aus der §. 427. entwikkelten Formel $x = \frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right)}$ lassen sich auch die Gränzen dieser Möglichkeit gar leicht bestimmen. Wir wissen nämlich aus §. 283. daß die Grösse $\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right)}$ unmöglich ist, wenn $\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right)$ negativ wird. Da nun dis geschiehet, sobald f^2 größer als $\frac{p^2}{4}$ wird; so kan f^2 aufs höchste nur $= \frac{p^2}{4}$ genommen werden, ohne daß die Aufgabe unmöglich wird.

Die andere Größe p hingegen mag so groß genommen werden, als man nur immer wil; so wird die Wurzel aus $\frac{p^2}{4} - f^2$ nie unmöglich werden, ob sie gleich in den mehresten Fällen eine irra-

irrationale Größe sein wird. Und in der That kan auch allemal ein Rechtek angegeben werden, welches bei einem jeden verlangten Perimeter einen auch noch so kleinen gegebnen Flächenraum einschliest. So wird z. B. ein Rechtek, dessen Basis 25′ und dessen Höhe 1‴ ist, nur eine Fläche von 25□″ oder $\frac{1}{4}$□′, und gleichwohl einen Perimeter von 50′2‴, haben.

Daß aber $\frac{p^2}{4}$ nicht kleiner als f^2 sein darf, liegt schon in der vorigen Bestimmung, nach welcher f^2 nicht größer als p^2 werden solte.

§. 430.

Wenn $f^2 = \frac{p^2}{4}$ genommen wird, so wird $\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right)} = 0$, folglich die eine Seite $x = \frac{p}{2}$, also auch die andere Seite $p - x$ ebenfals $= \frac{p}{2}$, so daß das verlangte Rechtek in diesem Falle ein Quadrat wird. Hieraus folgt der Saz, daß unter allen Rechtekken das Quadrat dasjenige ist, welches mit dem kleinsten Perimeter den grösten Flächenraum einschliest.

§. 431.
Geometrische Construktion

Der Formel $x = p \mp \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right)}$

Man nehme Fig. 29. $AB = \frac{p}{2}$, beschreibe mit $AD = f$ einen Kreis, desgleichen mit $AC = \frac{AB}{2}$ einen andern Kreis, und ziehe die DB: so wird, weil $ADB = R$, $DB^2 = AB^2 - AD^2$, folglich $DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - f^2}$, daher des verlangten Rechtekkes Basis $x = AB + DB$, die Höhe $p - x = 2\,AB - AB - DB = AB - DB$ sein.

Außer dem Schneidungspunkte D fält noch ein anderer bei δ in die Augen, und zwar so, daß die $B\delta$ der BD volkommen gleich, aber der Lage nach gerade entgegengesezt ist; indem BD nach oben hinauf, $B\delta$ aber nach unten herunter liegt. Auf diese Weise wird in dieser Zeichnung durch die BD die positive, durch die $B\delta$ aber die negative Wurzel angegeben. Gebraucht man diese negative Wurzel; so wird die Basis $x = AB - BD$, also nunmehr die Basis so groß, als vorher beim Gebrauch der positiven Wurzel die Höhe ward, hingegen die Höhe $p - x = 2\,AB - (AB - B\delta) = 2\,AB - AB + BD = AB + BD$, folglich in diesem Falle die Höhe so groß, als beim Gebrauch der positiven Wurzel die Basis. Beide Rechtekke erfüllen die Forderungen der Aufgabe, dekken einander, und haben nur eine verschiedene Lage.

§. 432.

Die AD ($= f$) mag so klein genommen werden, als man nur immer wil, so wird der damit beschriebne Kreis doch immer den mit AC beschriebnen Kreis in 2 Punkten schneiden, und zwar so, daß die BD und B δ $\left(= \mp \sqrt{p^2 - f^2}\right)$ immer grösser werden, so wie die AD immer kleiner genommen wird. Wird endlich die AD $= 0$ angenommen, so mus auch der ganze mit AD beschriebne Cirkelkreis in dem Punkte A, und auch seine beiden Schneidungspunkte D, δ in A zusammenfallen. In diesem Falle erhält die BD ihren grösten Werth, und wird $= AB = \frac{P}{2}$. Alles dieses stimt mit denen über die algebraische Formel angestelten Betrachtungen vortreflich überein.

§. 433.

Je größer im Gegentheil die AD genommen wird, um desto kleiner wird BD und B δ. Beide Punkte D und δ fallen in B zusammen, wenn AD $=$ AB genommen wird, indem in diesem Falle der mit AD beschriebene Kreis den andern mit CA beschriebnen Kreis nur in dem einzigen Punkte B berührt. Dieser Werth von AD ist auch der höchste Werth, bei welchem die Aufgabe noch möglich bleibt. Denn sobald AD nur etwas größer als AB genommen wird; so wird der mit AD beschriebne Kreis mit dem andern Kreise gar kein Punkt mehr gemeinschaftlich haben. Auf diese Weise lehrt auch diese Zeichnung den Saz, daß die Wurzel aus einer negativen Größe unmöglich ist.

Sieb:

Siebzehntes Kapitel.

Aufgaben, welche zur Trigonometrie vorbereiten.

§. 434.

Wenn ich einen Winkel NBM verzeichne, Fig. 30. und aus einem beliebigen Punkte A des einen Schenkels eine Linie A C unter einem gewissen, z. B. unter einem rechten Winkel auf den andern Schenkel BM ziehe; so findet zwischen den beiden Linien AC und CB eine gewisse Verhältnis stat, welche für einerlei Winkel NBM sich beständig gleich bleibt, ich mag den Punkt A noch so weit von B, oder noch so nahe an B nehmen. Denn nehme ich z. B. diesen Punkt in A′, so wird, wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiekke (Num. 38.) ABC und A′BC′, sich verhalten AC : CB = A′C′ : C′B, und eben so, wenn das Punkt im A″ genommen würde, auch sein AC : CB = A″C″ : C″B: Sobald aber stat des Winkels NBM ein größerer oder kleinerer Winkel genommen wird; so wird das Verhältnis dieser beiden Linien sich ändern, und z. B. bei einem kleinern Winkel nBm das Verhältnis dieser beiden senkrechten Linien a C : B C, oder a′C′ : BC′, oder a″C″ : BC″ größer sein, als AC : BC, das ist, es wird a C in B C öfter enthalten sein, als A C in B C.

§. 435.

§. 335.

Für einen Winkel NBM = 45° wird sein AC : BC = 1 : 1, wie gar leicht aus geometrischen Gründen erhellet, und umgekehrt kan ich versichert sein, daß ABC = 45° sein müsse, wenn die beiden unter einen rechten Winkel aneinander gesezten Linien AC und BC einander gleich gemacht sind, oder welches einerlei ist, sich verhalten wie 1:1.

§. 436.

Wird NBM = 37° genommen; so wird man finden, daß ohngefähr AC : CB = 3 : 4, und wenn NBM = 26° 34′ genommen wird, ohngefähr AC:BC = 1 : 2 sein, und so stehen diese beiden Linien für einen jeden Winkel in einem eignen zu diesem Winkel gehörigen Verhältnisse.

§. 437.

Werden nun wiederum zwei Linien, QS, SR, in der Verhältnis 3:4 unter einen rechten Winkel Fig. 31. zusammengesezt; so mus QRS = 37°; wenn sich aber Fig. 32. QS : SR verhält wie 1 : 2 der Winkel QRS = 26° 34′ sein: wovon man sich auf folgende Weise algemein überzeugen kan.

§. 438.

Durch die gezogene Normale AC, Fig. 30. entsteht ein rechtwinklichter Triangel ABC. Wird nun

nun Fig. 31. auch QSR = R und QS : SR = AC : CB gemacht; so mus △ QSR ∽ △ ACB, folglich auch der Winkel QRS = ABC werden. Beide Triangel werden auch ähnlich, sobald nur QS : SR = AC : CB und die Winkel QSR und ABC einander gleich gemacht werden, wenn es auch nicht gerade rechte Winkel sind.

§. 439.

XCVIII. Aufgabe.

Die Höhe der Sonne über dem Horizonte zu finden.

§. 440.

Vorbereitung.

Der Bogen ACBD Fig. 33. sei ein Theil des Cirkelkreises, welcher über die ganze Umfläche der Erdkugel durch die Punke C und B ohne merkliche Abweichung gezogen werden kan, in welchem Punkte B eine Stange BG perpendikulair auf die Horizontallinie HR eingestekt ist: so ist BC die Länge des Schattens, wenn die Sonne um den Bogen DR, oder welches einerlei ist, um so viel Grade als der Winkel o enthält, über dem Horizont erhaben ist. Für einen höhern Stand der Sonne in s würde der Winkel dcB die Höhe der Sonne, das ist, die Zahl der Grade des Bogens dDR angeben.

§. 441.

Auflösung.

Man messe die Länge der Stange BG und des Schattens BC, und verzeichne auf dem Papiere die Linien $k\beta$ und $\beta\gamma$ Fig. 34. dergestalt, daß bei β ein rechter Winkel ist, und beide Linien eben so viel Ruthen, Schuhe, Zoll nach irgend einem verjüngten Maßstabe, als BG und BC einem größern haben. Man ziehe noch darauf die $k\beta$; so wird der Winkel $\gamma k\beta$, welchen man durch Transporteur messen kan, die Höhe der Sonne angeben.

§. 442.

Beweis.

Es enthält $\gamma\beta$ eben so viel Ruthen, Schuhe, ꝛc. in verjüngtem Maße als GB im ordentlichen; folglich ist $\gamma\beta$ gerade so viele male kleiner, als GB, als vielmal eine Ruthe (also auch ein Zehntel und Hundertel einer Ruthe) in dem verjüngten Maße kleiner ist, als eine Ruthe (ein Zehntel und Hundertel einer Ruthe) im wahren Maße: das heißt, es verhält sich

GB : $\gamma\beta$ = wie das wahre Maß : zum verjüngten.

Eben so verhält sich auch

BC : βk = wie das wahre Maß : zum verjüngten.

Also ist GB : $\gamma\beta$ = BC : βk

daher auch GB : BC = $\gamma\beta$: βk

ferner ist $\angle$ GBC = $\gamma\beta k$

folglich N. 39. $\triangle$ BCG $\backsim$ $\beta\gamma k$

also $\angle$ o = $\gamma k\beta$.

§. 443.

§. 443.

Wir wollen hiebei noch folgende kleine Bemerkung machen. Wenn die Sonne gerade so hoch wie ohngefähr in s steht, so daß der Winkel GcB = 45° wird; so bleibt, da GBc = 90° für BGc ebenfals 45°, also müssen BG und Bc zwei gleiche Schenkel sein, so daß man bei dieser Höhe der Sonne von 45° die Höhe eines Thurmes, Baumes, u. d. sehr leichte erforschen kan, indem die geworfenen Schatten den Höhen selbst gleich sind. Wenn die Sonne, und ob sie diesen Stand habe, das kan man entweder aus den gehörigen Büchern und astronomischen Gründen, oder dadurch erfahren, daß man an irgend einem vertikal stehenden Stabe, oder einer jeden andern Höhe, die man unmittelbar messen kan, den Versuch macht, ob dabei der Schatten der Höhe gleich sei. Denn in dem Augenblikke, da dies bei irgend einer Höhe zutrift, geschieht es bei allen andern nicht gar zu weit entfernten Höhen.

§. 444.

XCIX. Aufgabe.

Aus der gegebnen Grundlinie AC, Fig. 26. und den beiden anliegenden Winkeln BAC und BCA die Höhe des Dreiekkes BD zu bestimmen.

§. 445.

Auflösung.

Man seze AC = b und BD = x.

Da mir der Winkel BAC gegeben ist, so kan ich auch das zu diesem Winkel gehörige Verhältnis BD : AD als ein bekantes Verhältnis betrachten und der kürzern Schreibart wegen ausdrükken durch f : g. Eben so kan ich auch das durch den Winkel BCA bestimte Verhältnis BD : DC gleich sezen p : q; dergestalt, daß

$f:g = BD:AD$, und $p:q = BD:DC$, daher

$AD = \frac{gx}{f}$, und $DC = \frac{qx}{p}$,

folglich, da $AD + DC = AC$,

auch $\frac{gx}{f} + \frac{qx}{p} = b$ wird,

daher $pgx + fqx = bfp$

$$x = \frac{bfp}{pg + fq}$$

§. 446.

Nach dieser Formel kan x in Zahlen berechnet und angegeben werden, wenn außer der Linie b auch die Verhältnisse f : g und p : q in Zahlen angegeben sind. Die geometrische Auflösung dieser Aufgabe ist ungemein leicht, indem man nur den durch die Grundlinie und die beiden anliegenden Winkel bestimten Triangel zu beschreiben, und die aus der Spize dieses Triangels auf die Grundlinie

 normal-

normalfallende Linie zu ziehen braucht. Aber die Berechnung in Zahlen nach einer solchen durch algebraische Auflösung gefundenen Formel hat öfters einen ungemeinen Vorzug vor einer solchen geometrischen Verzeichnung. Denn wenn etwan die in einer solchen Zeichnung vorkommenden Linien sehr beträchtliche Weiten auf dem Felde, oder gar noch größere Entfernungen zwischen den Weltkörpern vorstellen müsten; so würden die kleinsten Fehler, welche sich in einer so sehr verjüngten Zeichnung dem Auge gänzlich entziehen, doch im wahren Maße gar beträchtliche Größen sein können. Diese Fehler würden nun freilich auch durch eine nach unsrer Formel vorgenommene Berechnung nicht vermieden werden, wenn man die in Zahlen anzugebenden Verhältnisse f:g, p:q, durch Verzeichnung der Linie AD, DB, DC, DB erst finden müste: Aber man hat schon die Verhältnisse solcher Linien für jeden bis auf Minuten und noch weiter bestimten Winkel nicht nach Zeichnungen abgemessen, sondern nach Schlüssen mit sehr großer Genauigkeit in den trigonometrischen Tafeln berechnet, durch deren Gebrauch wir auch solche Fehler vermeiden können, welche nur der Verstand noch begreifen, das Auge nicht mehr entdekken kan.

§. 447.

Erklärung.

Eine Reihe von Zahlen, worin ein Glied von dem nächstvorhergehenden um eben so viel unter-

ter-

terschieden ist, als ein jedes anderes Glied von dem ihm nächstvorhergehenden, heist eine arithmetische Reihe oder Progression. Z. B.

1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, wo der Unterschied 3 ist.
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, — — 2 ist.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, — — 1 ist.

§. 448.

Hieraus sieht man sogleich ein, daß man eine arithmetische Reihe nach Belieben fortsezen kan, sobald nur ein Glied und der Unterschied dieses Gliedes von dem ihm nächstfolgenden Gliede gegeben sind, und daß folgende Reihe

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d$ &c.

wo a das erste Glied und d die Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder bedeutet, die algemeine Form einer arithmetischen Reihe ist, welche z. B. zu folgender Reihe, 4, 7, 10, 13, 16 ꝛc. wird, wenn $a = 4$ und $d = 3$ gesezt wird, und zu folgender Reihe, 1, 6, 11, 16, 21, ꝛc. wird, wenn man $a = 1$, und $d = 5$ sezet.

§. 449.

C. Aufgabe.

Aus dem ersten Gliede a, der Differenz zweier Glieder d und der Anzahl der Glieder das lezte Glied einer arithmethischen Progression zu finden.

§. 450.

Auflösung.

Aus der algemeinen Form der arithmetischen Reihe erhellet sogleich, daß das 2te Glied $= a + d$, das 3te $= a + 2d$, das 4te $= a + 3d$, also das nte Glied, welches zugleich das lezte Glied in einer Reihe von n Gliedern ist, $= a + (n - 1) d$ sei.

§. 451.

Wenn wir daher das lezte Glied u nennen; so erhalten wir 1) $u = a + (n - 1) d$, eine Formel, welche die Verbindung der vier Zahlen u, a, n, d dergestalt darstelt, daß man eine jede von diesen vier Zahlen finden kan, sobald die drei andern angegeben sind. Denn es ergeben sich aus dieser Gleichung auch folgende 2) $n = \frac{u - a}{d} - 1$

3) $a = u - (n - 1) d = u - dn + d$

4) $d = \frac{u - a}{n - 1}$

§. 452.

Schreibt man unter einer arithmetischen Reihe dieselbe Reihe rükwärts, und addirt die untereinanderstehenden Glieder

$$\begin{array}{lllll} a, & a + d, & a + 2d, & a + 3d, & a + 4d, \\ a + 4d, & a + 3d, & a + 2d, & a + d, & a\ ; \\ \hline \end{array}$$

so erhält man

$2a + 4d$, $2a + 4d$, $2a + 4d$, $2a + 4d$, $2a + 4d$, und

es

es ist offenbar, wenn S die Summe aller Glieder in einer dieser Reihen bedeutet, $2S = 5(2a + 4d)$. Wenn die Reihe stat 5 Glieder 6 Glieder hätte, würde sein $2S = 6(2a + 5d)$, und wenn n die Anzahl der Glieder in einer arithmetischen Reihe bedeutet; so ist $2S = n(2a + (n - 1)d)$

oder $2S = n(a + a + (n - 1)d)$, oder

da $a + (n - 1)d = u$ (§. 451.)

auch $2S = n(a + u)$

und $S = \frac{n}{2}(a + u)$.

§. 453.

Nach dieser Formel kan die Summe S einer arithmethischen Reihe gar leicht berechnet werden, wenn die Anzahl der Glieder n, das erste Glied a und das lezte Glied u gegeben sind. Und da nach der Formel bei 1) §. 451. das lezte Glied u, aus a, n, d, bestimt ist, so kan auch S aus a, n, d, gefunden werden, wenn auch u nicht gegeben ist. Denn indem man in die Formel $S = \frac{n}{2}(a + u)$ stat u, den bei 1) §. 451. bestimten Werth desselben $a + (n - 1)d$ schreibt; so erhält man eine Gleichung, worin S aus den 3 Zahlen a, n, d bestimt ist. Und da nach der Formel bei 2) n aus u, a, d bestimt ist; so kan auch S aus a, u, d; da in der Formel bei 3) a aus u, n, d bestimt ist, auch S aus u, n, d; da ferner nach der Formel bei 4) n aus u, a, d bestimt ist, auch S aus u, a, d gefunden werden.

§. 454.

CI. Aufgabe.

Man kauft ein Pferd, mit der Bedingung, daß man für den ersten Hufnagel 8 Gr. für den 2ten 12 Gr. für den 3ten 16 Gr. u. s. w. für jeden folgenden Hufnagel, deren in allen 32 sind, immer 4 Gr. mehr bezahlt: wie hoch wird das Pferd zu stehen kommen?

§. 455.

Auflösung.

Der Preis des Pferdes ist offenbar die Summe S, einer arithmetischen Reihe von 32 Gliedern, deren erstes Glied $a = 8$ und Differenz $d = 4$ ist. Die Formel $S = \frac{n}{2}(a+u)$ kan uns daher zur Auflösung unsrer Aufgabe nicht unmittelbar dienen, weil in unserer Aufgabe das lezte Glied u nicht gegeben ist. Schreiben wir aber in diese Formel stat u den bei 1) §. 451. aus a, n und d bestimten Werth desselben, $a + (n-1)d$, so erhalten wir $S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$, wonach für unsere Aufgabe wird $S = 16(16+31.4) = 2240$ Gr. $=$ 93 Rthlr. 8 Gr.

§. 456.

CII. Aufgabe.

Zertheile 14 in 7 Theile, wovon jeder Theil um $\frac{1}{3}$ größer ist als der nächstvorhergehende.

§. 458.

§. 457. Auflösung.

Diese 7 Theile müssen offenbar eine arithmetische Progression ausmachen, deren Summe $S = 14$, Anzahl der Glieder $n = 7$ und Differenz $d = \frac{1}{3}$ ist. Diese Reihe kan gebildet werden, sobald nur außer der schon gegebnen d noch das erste Glied a gefunden ist. Nach der Formel $S = \frac{n}{2}(a + u)$ kan dieses a noch nicht sogleich bestimt werden, weil diese Formel auch noch eine andere uns unbekante Zahl u enthält, schreiben wir aber nach §. 451. stat u den Werth desselben $a + (n - 1) d$ in diese Formel; so erhalten wir $S = n (a + a + (n - 1) d)$, eine Gleichung, worinn außer denen uns bekanten Zahlen S, n, d nur noch die eine unbekante a enthalten ist. Diese a kan also nunmehr allerdings aus dieser Gleichung bestimt werden, indem man die a auf die eine Seite, alle übrige bekante Zahlen aber auf die andere Seite bringt. Es ergiebt sich durch die gewöhnlichen Veränderungen nach und nach

$$2S = 2na + dn^2 - dn$$

$$a = \frac{2S + dn - dn^2}{2n}$$

$$a = \frac{2S}{2n} + \frac{d(n - n^2)}{2n}$$

$$a = \frac{S}{n} + \frac{dn(1 - n)}{2n}$$

$$a = \frac{S}{n} + \frac{d(1 - n)}{2}$$

$$a = \frac{S}{n} - \frac{(n - 1)d}{2}$$

 Demnach

Demnach wird in unsrer Aufgabe $a = \frac{14}{2} - (7-1)1 = 1$ zu nehmen, und die verlangte Progression folgende sein

$$1, 1\tfrac{1}{3}, 1\tfrac{2}{3}, 2, 2\tfrac{1}{3}, 2\tfrac{2}{3}, 3.$$

§. 458.

Wenn die Differenz einer arithmetischen Reihe negativ, oder $-d$ gesezt wird, so wird jedes folgende Glied um d kleiner als das vorhergehende; die algemeine Form dieser Reihe ist folgende:

$$a,\ a-d,\ a-2d,\ a-3d,\ a-4d \text{ \&c.}$$

und eine solche Reihe heist eine abnehmende Reihe, so wie die vorige §. 448. eine wachsende Reihe genant wird.

§. 459.

Es ist offenbar, daß alle von §. 450. bis §. 453. für die wachsende Reihe geführten Schlüsse und Formeln, auch für diese abnehmende Reihe gelten, wenn man nur allenthalben $-d$ stat $+d$, also auch umgekehrt $+d$ stat $-d$ schreibt.

Z. B. Da in einer wachsenden Reihe das lezte Glied $u = a + (n-1)d$ ist; so wird in einer abnehmenden Reihe das lezte Glied $u = a - (n-1)d$, welches gerade der Werth des ersten Gliedes in einer wachsenden Reihe ist. Daß dis seine völlige Richtigkeit habe, übersehen wir leicht, da eine jede wachsende Reihe zu einer abnehmenden Reihe wird, wenn man sie rükwärts nimt, und also das lezte

Glied

Glied zum ersten, und das erste Glied zum lezten macht.

§. 460.

Die Formel $S = \frac{n}{2}(a + u)$ bleibt, weil d gar nicht darin vorkömt, ganz unverändert, und man wird diesemnach sowohl die Summe einer abnehmenden als wachsenden Reihe allemal richtig finden, wenn man die Summe aus dem ersten und lezten Gliede durch die halbe Anzahl der Glieder multiplicirt. Auch dis ist volkommen richtig. Denn wenn diese Formel für eine abnehmende Reihe gilt; so ist u darin eben so groß als das erste Glied in einer wachsenden Reihe von gleich vielen Gliedern, dessen erstes Glied a und leztes Glied u ist. Es mus aber allerdings z. B.

$$a + a+d + a+2d + a+3d =$$
$$a+3d + a+3d - d + a+3d - 2d + a+3d - 3d$$

sein.

§. 461.
CIII. Aufgabe.

Mehrere Soldaten werden wegen Ersteigung einer Batterie dergestalt belohnt, daß der zweite etwas weniger als der erste, der dritte um eben so viel weniger als der zweite, u. s. w. jeder folgende um eben so viel weniger bekömt. Bei der Vertheilung konten zwei von den Theilnehmenden nicht zugegen sein; man gab daher den Antheil des einen Abwesenden mit an seinen guten Freund,

welcher der 5te war, und den Antheil des andern Abwesenden an einen andern Soldaten, welcher der 10te war. Der 5te Soldat hatte für sich und seinen Freund, den 7ten Soldaten, 8 Rthlr. 8 Gr. der 10te Soldat für sich und seinen Freund, den 12ten, 6 Rthlr. 16 Gr. bekommen. Wie viel muste ein jeder an seinen Freund abgeben?

§. 462.

Die ausgetheilten Belohnungen machen in der Ordnung eine abnehmende Reihe aus. Wenn wir das erste Glied dieser Reihe a Gr., ihre Differenz — d Gr. sezen; so betrug das 5te Glied, welches der Antheil des 5ten Soldaten war, $a - 4d$, und der Antheil seines Freundes, des 7ten Soldaten $a - 6d$, des 10ten Soldaten $a - 9d$, und des 12ten $a - 11d$. Folglich mus a und d dergestalt angenommen werden, daß

I) $2a - 10d = 8$ Rthlr. 8 Gr. und

II) $2a - 20d = 6$ Rthlr. 16 Gr. wird,

das ist, $2a - 10d = 192$ Gr. $2a - 20d = 160$ Gr.

Die zweite Gleichung von der ersten abgezogen, das ist

$$
\begin{array}{lrcr}
\text{zu} & 2a - 10d & = & 200 \\
\text{addirt} & -2a + 20d & = & -160 \\
\hline
\text{giebt} & 10d & = & 40, \\
\text{folglich} & d & = & 4.
\end{array}
$$

Aus der Gleichung $2a - 10d = 200$ ergiebt sich, daß $a = \frac{200 + 10d}{2} = 100 + 5d$, folg-

lich

lich a = 120 sein mus, und aus diesem ersten Gliede und der Differenz erhalten wir folgende abnehmende Reihe, woraus man das 5te, 7te, 10te, 12te Glied gebraucht:

1. 2. 3. 4. 5. . . . . . . 7 . . . . 10 . . . 12'.
120, 116, 112, 108, 104, 100, 96 . . . . . . 84 . . . . 76.

§. 463.

Erklärung.

Eine Reihe von Zahlen, in welcher jedes Glied zum nächstfolgenden einerlei Verhältnis hat, heist eine geometrische Reihe. Z. B.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ꝛc.

In dieser Reihe verhält sich z. B. das 3te Glied zum 4ten wie das 4te zum 5ten: denn es ist 4 : 8 = 8 : 16 (= 1 : 2). Auch ist 16 : 32 = 64 : 128 (= 1 : 2).

§. 464.

In folgender Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 ꝛc. verhält sich ein jedes Glied zu dem nächstfolgenden, wie 1 : 3.

Diese Zahl 3, welche anzeigt, um wie viel mal ein jedes Glied grösser ist, als das nächstvorhergehende, wird der Exponent der Progression genant, welches in der im vorigen §. angegebnen Reihe die Zahl 2 war. Wird daher dieser Exponent algemein durch e, und das erste Glied durch a angedeutet; so giebt folgende Reihe

a, ae, aee, aeee, aeeee, aeeeee &c.

oder a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, ae^5 &c.

die algemeine Form der geometrischen Reihe.

§. 465.

§. 465.

CIV. Aufgabe.

Die Summe einer geometrischen Reihe von 5 Gliedern zu finden.

§. 466.

Auflösung.

Die Reihe sei a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, und die gesuchte Summe sei S, dergestalt, daß

$S = a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4$; so wird auch $S(e-1) = (e-1)(a+ae+ae^2+ae^3+ae^4)$ das ist

$$\begin{array}{l} a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 \\ e - 1 \\ \hline ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + ae^5 \\ \quad - a - ae - ae^2 - ae^3 - ae^4 \\ \hline \end{array}$$

$S(e-1) = ae^5 - a$ daher $S = \frac{(e^5-1)a}{e-1}$ sein.

§. 467.

Hätte diese Reihe stat 5 Glieder 6 Glieder; so würde gefunden $S = \frac{(e^6-1)a}{e-1}$

In einer Reihe von 7 Gliedern wird $S = \frac{(e^7-1)a}{e-1}$

und überhaupt in einer Reihe von n Glieder $S = \frac{(e^n-1)a}{e-1}$ sein.

§. 468.

CV. Aufgabe.

Der Erfinder des Schachspiels wünschte, daß man ihm für das erste Feld seines Schachbrettes 1 Gerstenkorn, für das zweite 2, für das dritte 4, u. s. w. für jedes folgende Feld immer doppelt so viel Körner geben mögte. Wie viel Körner würde er hiernach erhalten haben, wenn sein Brett 64 Felder hatte?

§. 469.

Auflösung.

Die gesuchte Zahl ist offenbar die Summe einer geometrischen Progression von 64 Gliedern, deren erstes Glied 1, und deren Exponent 2 ist. Wird nun in der algemeinen Formel $S = \frac{(e^n - 1)a}{e - 1}$ 1 stat a, 64 stat n, und 2 stat e geschrieben; so ergiebt sich für unsere Aufgabe der Werth von $S = 2^{64} - 1$, das ist,

$$S = 18'''446744''073709'551615.$$

Diejenigen Lehren der arithmetischen und geometrischen Reihen, nebst denen leichten Lehrsäzen der arithmetischen Proportion, welche zur Erklärung der Logarithmenrechnung unentbehrlich sind, können nunmehro aus einem jeden Lehrbuche der Geometrie erlernt werden.

Acht=

Achtzehntes Kapitel.

Auflösung einiger unbestimten Aufgaben.

§. 470.

Wie allemal eine unbekante Zahl aus einer Gleichung, 2 unbekante Zahlen aus 2 Gleichungen, 3 unbekante Zahlen aus 3 Gleichungen u. s. w. bestimt werden, ist bisher in vielen Auflösungen gezeigt. Wenn aber die Forderungen einer Aufgabe nicht anders als durch 2 unbekante Zahlen ausgedrukt werden können, und man doch aus allen Forderungen der Aufgabe nur eine einzige Gleichung herleiten kan; oder, wenn die Bedingungen einer Aufgabe sich auf 3 unbekante Zahlen beziehen, und doch nur 2 Gleichungen geben, oder sich auf 4 unbekante Zahlen beziehen, und doch nur 3 Gleichungen geben, u. s. w. so lassen sich die unbekanten Zahlen nicht allemal genau bestimmen, und diese Aufgaben heißen daher unbestimte Aufgaben. Noch viel unbestimter kan eine Aufgabe werden, wenn ihre Bestimmungen etwan nur 2 Gleichungen geben, und doch nicht ohne 4 unbekante Zahlen ausgedrukt werden können, 2c.

§. 471.

CVI. Aufgabe.

Zwei Zahlen zu finden, deren Summe 7 ist.

§. 472.

Auflösung.

Nennen wir die eine Zahl x, die andere y; so ist die Forderung der Gleichung folgende: daß $x + y = 7$ sei. Alle Bedingungen der Aufgabe sind durch diese eine Gleichung erschöpft, und gleichwohl kan man sich diese Bedingung nicht ohne zwei unbekante Zahlen vorstellen. Bringen wir y auf die andere Seite; so erhalten wir die Gleichung $x = 7 - y$, welche uns auf eine sehr deutliche Weise übersehen läst, wie die eine der unbekanten Zahlen von der andern abhängt, und welchen Werth die x bekommen mus, sobald wir der y einen von denen unzähligen Werthen, welche sie haben kan, wiklich bestimmen. Wenn wir z. B. annehmen wollen, $y = \frac{1}{2}$; so mus sein $x = 5\frac{1}{2}$

für $y = 1$ wird $x = 5$

für $y = \frac{3}{4}$ wird $x = 5\frac{1}{4}$

für $y = -2$ wird $x = 8$ sein müssen. Es ist unmöglich, alle die unendlich vielen Paare von Zahlen anzugeben, welche dieser Aufgabe Genüge leisten. Werden aber von diesen Zahlen die gebrochenen und negativen Zahlen ausgeschlossen, und wollen wir die Forderung der Aufgabe auf ganze Zahlen einschränken;

schränken; so wird die Anzahl der noch übrigen Werthe leicht zu übersehen sein. Es kan nämlich nach dieser Einschränkung y nicht kleiner als 1, und nicht größer als 6 genommen werden, und also nur sein

entweder $y = 1$, oder 2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 6,
also $x = 6 \ldots 5 \ldots 4 \ldots 3 \ldots 2 \ldots 1$

Man pflegt aber auch noch diejenigen Werthe einer jeden unbekanten Zahl mit anzuführen, bei welchen eine von den übrigen unbekanten Zahlen schon 0 wird, und nent diese beiden Werthe als die Gränzen dieser Zahl, zwischen welchen alle Werthe fallen müssen, bei welchem die ganze Aufgabe möglich bleibt. In unsrer Aufgabe ist für y die höhere Gränze 7 die niedere selbst 0, und x hat in dieser sehr einfachen Aufgaben dieselben Gränzen.

§. 473.

CVII. Aufgabe.

Zwei Zahlen zu finden, welche in einander multiplicirt eben so viel geben, als zu einander addirt.

§. 474.

Auflösung.

Wenn x und y diese beiden Zahlen sein sollen; so mus $xy = x + y$, folglich auch $xy - x = y$, das ist $(y - 1)x = y$, folglich auch $x = \frac{y}{y - 1}$ sein.

Nent

Nimt man z. B. $y = 6$, so wird $x = 1 + \frac{1}{5}$, und es ist allerdings das Produkt $6\,(1 + \frac{1}{5})$ das ist $7\frac{1}{5}$ = der Summe $6 + 1 + \frac{1}{5}$.

Sezt man $y = 4$, so wird $x = 1\frac{1}{3}$, und es ist allerdings auch $4\,(1\frac{1}{3}) = 4 + 1\frac{1}{3}$. Und man mag für y eine Zahl annehmen, welche man nur wil, so wird man nach dieser Formel auch allemal für x eine andre Zahl finden, welche mit der ersten das verlangte leistet.

Wenn aber ferner verlangt würde, daß beide Zahlen ganze und positive Zahlen sein solten; so wäre für y eine solche ganze Zahl zu sezen, bei welcher auch $\frac{y}{y-1}$ eine ganze Zahl bleibt. Um nun zu versuchen, ob man nicht irgend eine andere Formel erhalten könne, wodurch sich diejenigen Eigenschaften, welche y in diesem Falle haben mus, deutlicher ergeben wollen, als es in der schon vorhandenen geschieht; so sezt man $\frac{y}{y-1} = g$ mit dem Vorbehalte, daß g irgend eine ganze Zahl bedeuten solle, wie groß oder klein sie auch sein mag. Hiernach mus A) $y = gy - g$, und ferner $1 = g - \frac{g}{y}$ sein. Nun kan aber $\frac{g}{y}$ von g abgezogen nur alsdann eine ganze Einheit übrig lassen, wenn auch $\frac{g}{y}$ irgend einer

ganzen Zahl i gleich ist. Man sezt deshalb ferner $\frac{g}{y} = i$, nach welcher Voraussezung auch $g = iy$ sein mus. Da nun nach der Gleichung bei A) $y = gy - g$ sein sol; so mus auch $y = iyy - iy$, also $1 = iy - i$, das ist, $\frac{1}{i} = y - 1$ sein; also da $y - 1$ als die Differenz zwischen einer ganzen Zahl y und 1 nothwendig eine ganze Zahl ist, auch $\frac{1}{i}$ eine ganze Zahl sein. Und da dis nur in dem einzigen Falle sein kan, wenn $i = 1$ genommen wird; so wissen wir nunmehro, daß i keine andere Zahl außer 1 sein kan, folglich $y - 1 = \frac{1}{1}$, d. i. $y - 1 = 1$, also $y = 2$ sein mus. Folglich wird auch $x = \frac{y}{y-1} = \frac{2}{2-1} = 2$, und wir sind auf diese Weise überzeugt, daß die beiden ganzen Zahlen, 2 und 2, die einzigen ganzen Zahlen sind, welche die Forderungen unsrer Aufgabe erfüllen.

§. 475.

CVIII. Aufgabe.

Ein Münzmeister hat 14löthiges, 10löthiges und 9löthiges Silber, und wil daraus 30 Mark 12löthiges Silber zusammenmischen, wie viel mus er von jeder Sorte nehmen, wenn er nur ganze Marke nehmen wil.

§. 476.

§. 476.

Auflösung.

Wenn er von dem 14löthigen v Mark, von dem 10löthigen z Mark und von dem 9löthigen n Mark zusammenmischt, so enthält diese Mischung $14v + 10z + 9n$ Loth Silber. Da nun 30 Mark 12löthiges Silber 360 Loth Silber enthalten; so soll $14v + 10z + 9n = 360$, und da $v + z + n = 30$, folglich $n = 30 - v - z$ ist, auch $14v + 10z + 270 - 9v - 9z = 360$, also $5v + z = 90$, $v = 18 - \frac{z}{5}$ sein.

Damit v eine ganze Zahl werde, mus nothwendig auch $\frac{z}{5}$ eine ganze Zahl geben, folglich für z entweder 5 oder 15, 20, 25, 30 ꝛc. oder irgend eine von denen unendlich vielen Zahlen genommen werden, welche durch 5 ohne Rest dividirt werden.

Damit aber v nicht negativ werde, so darf $\frac{z}{5}$ nicht größer als 18, folglich z nicht größer als 90 genommen werden.

Bedenken wir aber ferner, daß $v + z + n = 30$ sein sol, folglich n schon 0 wird, sobald $v + z = 30$, das ist, $18 - \frac{z}{5} + z = 30$, das ist, $\frac{4z}{5} = 12$, also $z = 15$ wird; so sehen wir, daß wir die höhere Grenze für z bis auf 15 heruntersezen müssen, und für z nur diejenigen durch 5 theilbaren Zahlen annehmen können, welche zwischen 0 und 15 fallen.

Für $z = 0$, wird $v = 18$, $n = 12$,
für $z = 5$, wird $v = 17$, $n = 8$,
für $z = 10$, wird $v = 16$, $n = 4$,
für $z = 15$, wird $v = 15$, $n = 0$.

Worunter nur die beiden mitlern die zwei wahren Auflösungen angeben.

§. 477.

Wenn in der vorigen Aufgabe weiter nichts verändert würde, als nur dis, daß man stat z Mark zehnlöthigen Silbers, e Mark eilflöthigen Silbers zur Vermischung nehmen solte: so würde man folgende Gleichung erhalten, $14v + 11e + 9n = 360$, und da alsdenn $n = 30 - v - e$ wird, auch erhalten $14v + 11e + 270 - 9v - 9e = 360$, das ist, $5v + 2e = 90$. Wolten wir nun hier zuerst die Gränzen für v bestimmen; so würden wir aus dieser Gleichung folgende schließen:

$$e = 45 - \frac{5v}{2}$$

Damit e eine ganze Zahl werde, mus also auch $\frac{5.v}{2}$ eine ganze Zahl geben, welches nur alsdann geschiehet, wenn für v eine durch 2 theilbare, das ist, eine gerade Zahl angenommen wird. Man seze daher $u = 2t$, so hat man $e = 45 - 5t$. Was für eine ganze Zahl man nun auch für t annimt, so kan man allemal versichert sein, daß alle drei Zahlen v, e, n, ganze Zahlen werden müssen.

Denn

Denn v ist $= 2t$, das Duplum einer ganzen Zahl, Da aber $\frac{5v}{2}$ oder $\frac{5 \cdot 2t}{2} = 5t =$ einer ganzen Zahl ist; so wird auch $e = 45 - \frac{5}{2}v$, als die Differenz zwischen zween ganzen Zahlen, und endlich auch $n = 30 - e - v$, als die Differenz zwischen 30 und den ganzen Zahlen $v + e$, eine ganze Zahl werden.

Wir haben nunmehr noch diejenigen Werthe für t auszuschließen, bei welchen eine von diesen drei Zahlen negativ werden könte.

Für v ist diese Sache leicht entschieden: denn da $v = 2t$, so mus v positiv werden, wenn nur t positiv genommen wird.

e aber wird, da $e = 45 - 5t$ weniger als 0 oder negativ, sobald $5t > 45$, und gerade $= 0$, wenn $45 = 5t$, also $t = 9$ genommen wird; daher die Zahl 9 die eine Gränze von t bestimt.

Da endlich $n = 30 - v - e$, das ist, $n = 30 - 2t - 45 + 5t$, das ist, $n = -15 + 3t$ ist, so wird offenbar n negativ, sobald $3t < 15$, also $t < 5$, und gerade $n = 0$, wenn $t = 5$ genommen wird. Also ist 5 die andere Gränze, und zwar die niedere Gränze für t, weil man t nicht kleiner als 5, die vorige Gränze 9 aber, die höhere Gränze für t, weil man t nicht grösser als 9 nehmen darf, damit keine Zahl negativ werde. Hiernach ergeben sich folgende Auflösungen:

	5,	6,	7,	8,	9,
Für $t =$	5,	6,	7,	8,	9,
wird $2t = v =$	10,	12,	14,	16,	18,
und $48 - 5t = e =$	20,	15,	10,	5,	0,
und $-5 + 3t = n =$	0,	3,	6,	9,	12,

wovon die beiden äussern, in welchen eine Zahl 0 wird, abgerechnet, noch 3 wahre Auflösungen übrig bleiben.

§. 478.

CIX. Aufgabe.

Auf einem Markte, wo Kälber, Schafe und Gänse sind, ein Kalb 3 Rthlr. ein Schaf 2 Rthlr. und eine Gans 1 Rthlr. kostet, sol jemand 30 Stük Vieh für 50 Rthlr. einkaufen; wie viel mus er von jeder Art nehmen.

§. 479.

Auflösung.

k Kälber kosten 3k Rthlr. s Schafe kosten 2s Rthlr. und g Gänse 1g Rthlr. folglich müssen k, s und g dergestalt genommen werden, daß

I) $k+s+g = 30$, II) $3k+2s+g = 50$ wird.

Aus der ersten Gleichung folgt $g = 30 - k - s$, und dieser Werth von g in die zweite Gleichung geschrieben giebt $3k + 2s + 30 - k - s = 50$,

das ist, $2k + s = 20$,

daher $s = 20 - 2k$.

Sobald

Sobald für k eine ganze Zahl angenommen wird, so wird offenbar auch für s eine ganze Zahl, und auch für g eine ganze Zahl übrig bleiben.

Damit aber s nicht negativ werde, so darf k nicht größer als 10 genommen werden. Da $g = 30 - s - k$, das ist, $g = 30 - 20 + 2k - k$, das ist, $g = 10 + k$ ist; so ist gar nicht zu besorgen, daß g bei irgend einem positiven Werthe von k negativ werden mögte. Nun wird

für k =	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
s =	20,	18,	16,	14,	12,	10,	8,	6,	4,	2,	0
und g =	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20

worunter 9 wahre Auflösungen dieser Aufgabe angegeben werden.

Neunzehntes Kapitel.

Algemeine Anmerkungen über die Buchstabenrechnung.

§. 479.

Sechs und 2 zusammen addirt geben eine neue Zahl 8, welche die Summe der beiden Zahlen 6 und 2 ist, und auf diese Weise erhält man bei der arithmethischen Addition allemal eine neue Zahl, in welcher die zu addirenden Zahlen mit einander vereinigt enthalten sind. Vergleichen wir hiermit die algebraische Addition, wo z. B. $a + b$ die Summe von a und b genant wird; so sehen wir, daß die algebraische Addition eigentlich nur in der Anzeige der vorzunehmenden arithmetischen Addition besteht, welche man nicht eher wirklich unternehmen kan, als bis der Werth der zu addirenden Größen in bestimten Zahlen angegeben ist: Eben so wird $a - b$ die Differenz zwischen a und b, oder $a + c$ die Differenz zwischen a und $- c$ genannt, obgleich durch diese Ausdrükke nur die arithmethischen Operationen angezeigt werden, wodurch man diese Differenzen finden kan, sobald den Größen a, b, c, ein bestimter Werth beygelegt ist.

§. 480.

Auf ähnliche Weise ist festgesezt, daß durch den Ausdruk $p \cdot q$, oder $p \times q$, oder blos durch das Nebeneinanderschreiben zweier Zahlen, durch pq die vorzunehmende Multiplikation dieser beiden Zahlen, durch den Ausdruk $\frac{m}{n}$ oder $m:n$ aber die vorzunehmende Division der m durch die n angezeigt werden solle. Da sich nicht jede bestimte Zahl durch eine jede andere bestimte Zahl wirklich dividiren läst; z. B. 2 nicht durch 5, 3 nicht durch 4 dividiren läst; so mus man es auch bei der arithmethischen Division sehr ofte nur bei einer ähnlichen Anzeige der vorzunehmenden Division bewenden lassen, wodurch die Form der Brüche, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ entsteht.

Wie man nun schon in der gemeinen Arithmethik sagt, daß $\frac{2}{3}$ der Quotient aus 2 durch 3 dividirt sei; so kan man auch mit eben dem Rechte in der Algebra sagen, daß $\frac{m}{n}$ der Quotient aus m durch n, pq das Produkt aus p und q sei.

§. 481.

Eben dasselbe gilt von den übrigen Zahlenveränderungen, wodurch eine Zahl zur 2ten, 3ten, 4ten, ꝛc. Potenz erhoben, oder umgekehrt, die 2te, 3te, 4te Wurzel aus einer Zahl gezogen wird. a^2 heist die Quadratzahl, oder zweite Potenz von a,

in so fern a^2 anzeigt, daß die Zahl a durch sich selbst zu multipliciren sei, und $\sqrt[2]{n}$ heist die zweite Wurzel von n, in so fern dieser Ausdruk anzeigt, daß man eine Zahl finden solle, welche durch sich selbst multiplicirt n giebt. Beides kan nicht eher wirklich geschehen oder versucht werden, als bis a und n in bestimten Zahlen angegeben sind.

§. 482.

Nach dem eben gesagten wird nun allerdings allemal $a+b$ oder $a-b$, die Summe oder Differenz, ab das Produkt, und $\frac{a}{b}$ der Quotient beider Zahlen a und b sein, was für Zahlen auch a und b bedeuten mögen. Auf diese Weise kan man in der Algebra durch algemeine Zahlen rechnen.

§. 483.

Diese algebraische Rechnungsart, wonach die vorzunehmenden Zahlenveränderungen nur angezeigt, nicht aber durch wirklich unternommene Veränderungen neue Zahlen erzeugt, und die zuerst gegebnen aus den Augen gelassen werden, verschaft uns den ungemeinen Vortheil, daß wir die Verbindung, worin mehre Größen mit einander stehen, und die Entstehungsart der einen Grösse aus den andern allemal deutlich übersehen können. So zeigt z. B. die in der XIV. Aufgabe gefundene Formel

$x = \frac{d + b}{a - c}$ sehr deutlich, daß die gesuchte Zahl der Personen allemal gefunden wird, indem man die Zahl der Groschen, um welche man bei einer Vertheilung zu wenig hat, zu derjenigen Zahl von Groschen, welche nach der andern Vertheilung übrig bleiben, addirt, und diese Summe durch den Ueberschuß dividirt, welcher angiebt, um wie viel man bey der ersten Vertheilung mehr geben wollte, als bei der zweiten. Nach der vorhergehenden Auflösung dieser Aufgabe in bestimmten Zahlen (§. 45.) wird freilich auch die Anzahl der Personen $x = 7$ richtig gefunden; es bleibt aber sehr ungewis, durch welche Veränderung die Zahl 7 aus denen dort gegebnen Zahlen 12, 6, 4, 2 entstanden ist. Denn nicht nur $\frac{12 + 2}{6 - 4}$ giebt 7, sondern es würde auch $\frac{12 + 6 - 4}{2} = 7$, auch auch $\frac{12 + 6}{4 + 2} + 4 = 7$ sein; und man könte noch viel mehrere Verbindungen entdekken, wodurch aus diesen gegebnen Zahlen 12, 6, 4, 2, die Zahl 7 hervorgebracht würde; da gleichwohl nur die erste die richtige ist, nach welcher die Zahl der Personen allemal gefunden wird, wenn auch die Zahlen derer in dieser Aufgabe vorkommenden Grössen nicht gerade dieselben 12, 6, 4, 2 sind.

§. 484.

In einer jeden Aufgabe sind Bedingungen und Forderungen enthalten, welche sowohl die Beschaffenheit der bekanten und unbekanten Zahlen betreffen, ob z. B. diese Zahlen positiv oder negativ, rational oder irrational sein sollen, als auch die Grössen gewisser unbekanten Zahlen durch angegebne Vergleichung mit andern bekanten Zahlen bestimmen.

Alle Bedingungen einer Aufgabe durch algebraische Zeichen ausgedrükt, geben eine oder mehrere Grundgleichungen, je nachdem die Aufgabe weniger oder mehrere Bedingungen enthält. In solchen Gleichungen mus also eine jede in der Aufgabe vorkommende sowohl bekante als unbekante Grösse durch ein gewisses Zeichen sinlich dargestelt werden, und man gebraucht für die bekanten und gegebnen Grössen gewöhnlich die ersten, für die unbekanten Grössen, die lezten Buchstaben des lateinischen Alphabetes. Giebt nun eine Aufgabe nur eine Grundgleichung A, in welcher alle Bedingungen derselben durch die bekanten und durch Eine unbekante Zahl x konten dargestelt werden; so können aus dieser Gleichung durch verschiedene Veränderungen nach und nach mehrere Gleichungen B, C, D, E, F, G, H, hergeleitet werden, dergestalt, daß in der lezten H auf der einen Seite nur die eine unbekante x ist, welche durch die blos bekanten Zahlen der andern Seite völlig bestimt wird.

Hiebei

Hiebei wird allemal aus der Gleichung A die B, aus der B die C.... aus der G die H auf solche Weise geschlossen, daß wenn bei irgend einem Werthe von x die lezte H bestehet, bei demselben Werthe der x rükwärts auch die G.... auch die C, B bestehen mus; und wenn diese B richtig ist, auch die Grundgleichung A, also auch alle in derselben ausgedrükten Bedingungen der Aufgabe bei diesem Werthe der x mit einander bestehen können.

§. 485.

Wenn sich die Bedingungen einer Aufgabe auf zwei unbekante Zahlen, x, y beziehen, aber auch zwei Grundgleichungen A und A′ geben, oder sich auf drei unbekante Zahlen x, y, z beziehen, aber auch drei Grundgleichungen A, A′, A″ geben; so kan aus diesen Grundgleichungen doch eine Gleichung A, in welcher nur eine unbekante Zahl x vorkomt, dergestalt gefolgert werden, daß wenn bei irgend einem Werthe von x diese Gleichung A bestehen kan, auch die drei Gleichungen A, A′, A″ bestehen können, nachdem die darin vorkommenden unbekanten Zahlen y und z durch eben den Werth von x und durch bekante Zahlen bestimt werden.

§. 486.

Eine Aufgabe darf nicht so viel Bedingungen enthalten, daß sich daraus mehrere Gleichungen ergeben, als unbekante Zahlen vorkommen.

Denn

Denn da z. B. zwei unbekante Zahlen x, y, durch zwei Gleichungen schon völlig bestimt werden; so kan weder x noch y den Forderungen einer dritten Gleichung aufs neue unterworfen werden: sondern wenn eine Aufgabe auch nur eine Gleichung mehr giebt, als sie unbekante Zahlen voraussezt; so müssen entweder die Forderungen der einen Gleichung völlig dieselben Zahlen bestimmen, welche eine oder mehrere von den übrigen Gleichungen zusammengenommen schon bestimmen; in dem Falle folgt schon die eine Gleichung aus einer oder mehrern von den übrigen, und die eine Gleichung ist völlig überflüssig: oder die Aufgabe mus unmöglich werden. (*)

§. 487.

(*) Z. B. Suche zwei Zahlen x, y, wovon die eine um 2 größer ist als die andere, deren Summe 6 und Produkt 8 ist. Diese Bedingungen geben folgende drey Gleichungen:

I) $x+2=y$, II) $x+y=6$, III) $xy=8$.

Aus den ersten beyden Gleichungen wird durch die gewöhnliche Auflösung gefunden, daß x keine andere Zahl als 2, und y keine andere Zahl als 4 sein kann. Die Werthe dieser beyden Zahlen sind auf diese Weise blos aus den ersten beiden Gleichungen bestimt, ohne daß man auf die dritte Gleichung die geringste Rüksicht genommen hat. Wird demohnerachtet, wie es hier der Fall ist, auch die Forderung der dritten Gleichung durch diese beiden Zahlen erfült; so geschieht

§. 487.

Wenn eine Aufgabe aber weniger Gleichungen giebt, als sie unbekante Zahlen enthält; so kan sie unbestimt bleiben und mehrere Auflösungen zulassen. Man sehe das 18te Kapitel.

§. 488.

Eine Aufgabe mus auch alsdann unbestimt bleiben, wenn ihre Bedingungen zwar eben so viele Gleichungen darbieten, als unbekante Zahlen vorkommen; aber zwei von diesen Gleichungen völlig einerlei Zahlen bestimmen, also die eine Gleichung aus der andern folget. Z. B. Wenn die Bedingungen der LXXXVII. Aufgabe folgendermaßen gegeben wären: 1) das Wasser, welches aus der ersten Röhre in 4 Stunden

läuft

schieht es nur, weil diese dritte Gleichung schon aus den beyden ersten von selbst folgt. Würde hingegen verlangt, daß $xy = 10$ sein sollte; so wäre diese Aufgabe unmöglich.

Suchet 2 Zahlen x, y, deren Summe, Produkt und Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind.

Diese Bedingungen geben drei Gleichungen:

I) $x + y = xy$, II) $x + y = x^2 - y^2$

III) $xy = x^2 - y^2$.

Aber wer sieht nicht sogleich, daß eine jede dieser Gleichungen nach einem bekannten Grundsatze schon aus den beiden übrigen folget und man daher bei der Auflösung dieser Aufgabe nur auf 2 von diesen Gleichungen zu sehen hat.

läuft, mit demjenigen, was aus der zweiten Röhre in 6 Stunden läuft, beträgt 26 Maß: 2) was aus der ersten Röhre in 2 Stunden fließt, mit demjenigen, was aus der zweiten Röhre in 3 Stunden fließt, beträgt 13 Maß, das ist, I) $4x + 6y = 26$, II) $2x + 3y = 13$; so folgt die zweite Gleichung schon aus der ersten. Ueberläßt man sich nun ohne weiteres Bedenken den mechanischen Auflösungen dieser beiden Gleichungen; so erhält man aus I) $x = \frac{26 - 6y}{4}$, aus II) $x = \frac{13 - 3y}{2}$, daher $\frac{26-6y}{4} = \frac{13-3y}{2}$, d. i. $\frac{13-3y}{2} = \frac{13-3y}{2}$ daher $13 - 3y = 13 - 3y$; und so komt man endlich auf das Resultat, worauf Anfänger, welche die Aufgaben noch nicht gehörig übersehen, oder auch geübtere bei zu verwikkelten Aufgaben, nur zu ofte treffen, daß $y = y$ sei. Eine solche identische Gleichung zeiget an, daß durch die Bedingungen der Aufgabe keine andere Beschaffenheit für y bestimmt wird, als daß y sich selbst gleich sein müsse. Folglich wird eine jede beliebige für y angenommene Zahl alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn diese y die einzige darin vorkommende unbekante Zahl ist, wie z. B. in der XXXII. Aufgabe. Eine solche Aufgabe kan daher mit Recht zu den unbestimten Aufgaben gerechnet werden. Und wenn außer der y noch mehrere unbekannte Zahlen in der Aufgabe vorkommen,

so

so müssen ihre Werthe aus dem für y angenommenen Werthe bestimt werden, wie es bey den Auflösungen der unbestimten Aufgaben gezeigt ist.

§. 489.

Unmöglich wird eine Aufgabe, wenn irgend eine Bedingung derselben mit einer oder mehrern von den übrigen Bedingungen nicht zugleich bestehen kan. Da nun die durch algebraische Auflösung aus der Grundgleichung entwikkelte Formel überhaupt die Verbindungen der in der Aufgabe vorkommenden Zahlen untereinander auf das deutlichste vor Augen stelt; so lassen sich aus dieser Formel auch viel leichter als aus den zuweilen sehr verwikkelten Bedingungen der Aufgabe selbst, die Ursachen von der Unmöglichkeit einer Aufgabe, und also auch die Grenzen entdekken, wo diese Ursachen wegfallen und die Aufgabe möglich wird.

§. 490.

Sehr oft geschieht es, daß sich für eine oder die andere unbekante Zahl ein negativer Werth ergiebt, ob gleich in der Aufgabe selbst keine solche entgegengesezte Beziehungen angegeben werden, wonach von denen darin vorkommenden Größen, die eine positiv und die andere negativ werden könte. Eine solche Aufgabe bleibt demnach auch so lange unmöglich, bis man die Bedingungen so algemein ausdrükt, daß sie solche entgegengesezte Beziehungen mit in sich fassen. Z. B. Ich habe

nur Vier- und Zweigroschenstükke, und mein Freund F wil von mir 6 Stük Geld haben, welche 2 Rthlr. werth sind; wie viel mus ich ihm von jeder Sorte geben?

Diese Aufgabe scheint beim ersten Anblikke etwas ganz Unmögliches zu verlangen. Denn wenn ich auch meinem Freunde nichts als Viergroschenstükke geben wolte; so würde er doch in 6 Viergroschenstükken nur den Werth von Einem Rthlr. erhalten. Es können auch diese Forderungen, so wie sie in der Aufgabe ausgedrükt sind, schlechterdings nicht erfült werden; vielleicht aber wird uns der, durch algebraische Auflösung entwikkelte Werth der gesuchten Zahlen, ein Verfahren an die Hand geben, wodurch das Verlangen meines Freundes gewissermaßen erfült werden könte.

Es sei x die Zahl der nöthigen Viergroschenstükke; so giebt $6-x$ die zu gebrauchenden Zweigroschenstükke an, und es mus x dergestalt genommen werden, daß

$4x$ gr. $+ 2(6-x)$ gr. $= 48$ gr. wird,

folglich überhaupt $4x+12-2x = 48$

daher $2x = 36$

und $x = 18$ sein,

daher ferner $6-x$, das ist, $6-18$, das ist, -12 die erforderliche Zahl der Zweigroschenstükke angiebt.

So bald nun von den beiden Zahlen 18 und -12 oder, welches einerlei ist, $+18$ und -12, die

$+18$

+ 18 anzeigt, daß ich 18 gr. an meinen Freund geben solle; so mus hingegen die — 12 andeuten, daß ich 12 gr. von meinem Freunde empfangen solle. Und wenn wir uns diesemnach vorstellen, daß F in 12 Zweigroschenstükken den Werth von Einem Rthlr. an mich zurükgiebt, nachdem er von mir in 18 Viergroschenstükken den Werth von 3 Rthlr. empfangen hat; so ist auf diese Weise gewissermassen der Wunsch des F erfült. Denn F hat nach einem solchem Tausche 6 Stük Geld mehr, und am Werthe 2 Rthlr. mehr, als er vor diesem Tausche hatte.

Dies kan uns veranlassen, diese Aufgabe sogleich weit algemeiner folgendermaßen auszudrükken. Ich und mein Freund F sind mit einer hinlänglichen Anzahl von Vier- und Zweigröschenstükken versehen, wie müssen wir verfahren, damit F um 6 Stük Geld mehr und zugleich am Werthe 2 Rthlr. mehr erhalte, als er jezt hat?

§. 491.

Sobald man annimt, daß das Produkt aus zweien positiven Zahlen positiv sein müsse; so ergeben sich nach den §. 241. ausgeführten Schlüssen die übrigen bekanten Lehrsäze, nach welchen auch das Produkt aus zweien negativen Zahlen positiv, hingegen das Produkt aus zweien Zahlen von ungleichen Zeichen negativ sein mus. Und hieraus werden ferner nach §. 242-244. die ähnlichen Lehr-

säze für die Division der positiven und negativen Größen hergeleitet. Ich wil noch einiges zur Erläuterung dieser Lehrsäze sagen, welche den Anfängern mehrentheils sehr sonderbar und auffallend scheinen.

§. 492.

Multipliciren heist nichts anders, als diejenige Zahl finden, in welcher der eine Faktor eben so enthalten ist, wie die Einheit in dem andern Faktor, daher man auch sagen kan, multipliciren heiße, die vierte Proportionalzahl zu der Einheit und den beiden Faktoren finden. Wenn aber die beiden Faktoren auch noch die Zeichen + oder — vor sich haben; so müssen bei der Multiplikation dieser Zahlen, außer der absoluten Größe auch noch die Beziehungen in Betrachtung kommen, welche durch diese Zeichen angedeutet werden, und es müssen demnach das Produkt und der eine Faktor einerlei oder entgegengesezte Zeichen haben, je nachdem der andere Faktor und die Einheit einerlei oder entgegengesezte Zeichen haben. Ob nun von zweien Faktoren, z. B. + a und — b, der eine Faktor + a mit der Einheit einerlei Zeichen habe, oder nicht, das kan nicht eher beantwortet werden, als bis man festgesezt hat, ob die Einheit das Zeichen + oder — vor sich habe. Welches von beiden Zeichen man der Einheit beilegen wolle, ist völlig gleichgültig; da die ganze Natur und Kraft der beiden Zeichen + und — darin bestehet, daß + 1 — 1 = 0 ist, folglich ein Zeichen für sich genom-

genommen, von dem andern nur durch Namen und Figur unterschieden ist.

§. 493.

Nimt man diese Einheit positiv an; so ergeben sich die algemein eingeführten Regeln, nach welchen zwei Faktoren von gleichen Zeichen ein positives, zwei Faktoren von ungleichen Zeichen hingegen ein negatives Produkt geben. Es kan z. B. nach der Voraussezung, daß die Einheit positiv sei, das Produkt aus — 3 und — 4 keine andere Zahl als + 12 sein. Denn da der eine Faktor — 3 nicht die Einheit + 1, sondern das Gegentheil derselben — 1 dreimal in sich fast; so mus auch das Produkt nicht den andern Faktor — 4, sondern dessen Gegentheil + 4 dreimal in sich enthalten; dergestalt, daß die positive Einheit, die beiden Faktoren und das Produkt folgende algebraische Proportion geben:

$$+1 : -3 = -4 : +12$$

Auf eben die Weise ergeben sich in den übrigen 3 Fällen folgende Proportionen:

$$+1 : +3 = +4 : +12$$
$$+1 : -3 = +4 : -12$$
$$+1 : +3 = -4 : -12$$

wonach man sagen kan: daß ein algebraisches Produkt die vierte Proportionalzahl zur positiven Einheit und den beiden Faktoren sei.

§. 494.

Sobald man hingegen der Einheit das andere Zeichen — giebt; so kan z. B. das Produkt aus + 3 und + 4 keine andere Zahl als — 12 sein, indem dieses Produkt das Gegentheil des einen Faktors + 4 eben so dreimal enthalten mus, als der andere Faktor + 3 das Gegentheil der Einheit — 1 dreimal enthält. Hieraus und aus den übrigen 3 Fällen, wo entweder beide Faktoren negativ, oder der eine positiv, der andere negativ sein können, ergeben sich folgende Proportionen:

$$-1 : +3 = +4 : -12$$
$$-1 : -3 = -4 : -12$$
$$-1 : +3 = -4 : +12$$
$$-1 : -3 = +4 : +12$$

Man müste nunmehr sagen, daß das algebraische Produkt zweier Zahlen die vierte Proportionalzahl zur negativen Einheit und den beiden Faktoren sei, und erhielte aus diesem Begriffe die Lehrsäze, daß zwei Faktoren von gleichen Zeichen ein negatives, und zwei Faktoren von ungleichen Zeichen ein positives Produkt geben.

§. 495.

Dieselben Lehrsäze können auch auf die in diesem Buche §. 241. gebrauchte Weise erwiesen werden, wenn man von dem Saze ausgehet, das $-3 \times -4 = -12$ sein müsse, welcher Saz eben so klar ist, als der dort zum Grunde gelegte, daß $+3 \times +4 = +12$ sei. Man könte diese

Lehr-

Lehrsäze, die mit den erstern gewöhnlichen völlig einerlei sagen, auch eben so gut als jene gebrauchen, und in die ganze Algebra einführen, so, wie man überhaupt versichert sein kan, daß ein jedes algebraische Buch noch eben so richtig bleibt, als es einmal ist; wenn man allenthalben stat — das Zeichen + und umgekehrt, und allenthalben, stat positiv, negativ, und umgekehrt, drukken liesse. Eben so wenig könte der Richtigkeit eines algebraischen Buches der geringste Eintrag geschehen, wenn man die beiden Zeichen + und — umtausen, das erste durch negativ, und das andere durch positiv aussprechen, alsdan aber auch + stat eines jeden —, und umgekehrt, oder auch bei unveränderten Zeichen allenthalben positiv, stat negativ, und umgekehrt, schreiben wolte. Diese leztern Lehrsäze sind also im Grunde weiter durch nichts von den erstern unterschieden, als daß positiv anders lautet als negativ, und das Zeichen + anders in die Augen fält als das Zeichen —.

§. 496.

Man würde die Fertigkeit im algebraischen Rechnen auf eine sehr lächerliche Weise erschweren, wenn man den Begrif der algebraischen Multiplikation und die daraus folgenden Lehrsäze in der einen Rechnung durch diese, in einer andern Rechnung durch andere Worte und Zeichen ausdrükken wolte. Ein dunkles Gefühl, welches durch den Namen positiv veranlaßt wird, scheint dafür zu ent-

entscheiden, daß man der Einheit ein für allemal das Zeichen + beilegen solle, und theils diesem dunkeln Gefühle, theils der weisen Verträglichkeit der Algebristen hat man es zu verdanken, daß man auch hierin für einerlei Begriffe beständig einerlei Worte und Zeichen gebraucht.

§. 497.

Es wird keine Schwierigkeit haben, alles was hier gesagt ist, auch auf die Division positiver und negativer Größen anzuwenden, wenn man nur bedenkt, daß durch Division diejenige Zahl gefunden wird, welche in dem Dividendus eben so enthalten ist, wie die Einheit im Divisor, folglich der Quotient die vierte Proportionalzahl zum Divisor der positiven Einheit und dem Dividendus sein mus. Die vier verschiednen Fälle geben folgende Proportionen:

$$+3 : +1 = +12 : +4$$
$$-3 : +1 = -12 : +4$$
$$+3 : +1 = -12 : -4$$
$$-3 : +1 = +12 : -4$$

§. 498.

Aus diesen Erläuterungen siehet man, daß sich mit allen diesen Lehrsäzen ganz deutliche und schikliche Begriffe verbinden lassen. In der That scheinen einige dieser Säze nur darum sonderbar und ungereimt, weil man sich theils nicht deutlich

denkt,

denkt, was Multiplikation und Division eigentlich sei; theils auch sich durch gewisse verworrene Vorstellungen abschrekken läßt, welche aus diesen Lehrsäzen zu folgen scheinen. Ich will davon ein Beispiel geben, welches stat aller andern dienen kann. Der Saz, daß zwei negative Faktoren ein positives Produkt geben sollen, findet bei den Anfängern den meisten Anstoß. Denn da sie gewohnt sind, sich unter negativen Größen einen gewissen Mangel, als Schulden, Verlust 2c. unter den positiven Größen das Gegentheil als vorräthiges Geld oder Gewinst 2c. zu denken; so glauben sie, es würde durch diesen Saz behauptet, daß Schulden durch Schulden multiplicirt einen Vorrath, Verlust durch Verlust multiplicirt einen Gewinst geben solle. Das, was diese Worte zu sagen scheinen, mus freilich einem jeden sehr ungereimt vorkommen. Man sieht aber gar leicht ein, daß diese Worte, Schulden durch Schulden, Verlust durch Verlust multipliciren eben so wenig irgend einen Sinn haben, als 2 Pfund durch 3 Rthlr., 2 Fuder Heu durch 5 Ducaten multipliciren §. 225. Man kan gar wol sagen, daß man 2 Rthlr. Schulden durch die Zahl 3 multipliciren, daß ist, dreimal nemen wolle; aber wer kan sich deutlich erklären, was das heißen solle, 2 Rthlr. Schuld durch 3 Rthlr. Schuld multipliciren.

Hingegen behauptet man nichts unschikliches, wenn man sagt, daß — 3 in 5 Rthlr. Verlust multiplicirt das Produkt 15 Rthlr. Gewinst gebe, in-

dem man damit nichts anders sagen wil, als daß das Gegentheil von 5 Rthlr. Schuld in 15 Rthlr. Gewinst eben so oft enthalten sei, als das Gegentheil von + 1 in — 3 enthalten ist.

§. 499.

Durch die algebraischen Bezeichnungen kan man sich die mehrsten Untersuchungen über arithmetische Warheiten ganz ungemein erleichtern, wenn gleich die dabei geführten Schlüsse nicht die gewöhnliche Form der algebraischen Auflösungen haben. Außer den §. §. 92, 135, 263, 270 zc. mögen uns noch diejenigen nüzlichen Regeln zum Beispiele dienen, nach welchen man sehr geschwinde übersehen kan, ob sich eine Zahl durch 3, 9, 11 zc. ohne Rest theilen lassen, d. i. ob man den dritten, neunten oder eilften Theil einer Zahl ohne Brüche angeben könne.

§. 500.

Gesezt, ich hätte von ohngefehr bemerkt, daß sich die Quersumme *) der Zahl 4851, nämlich 18, desgleichen die Quersumme der Zahl 94422, nämlich 21 durch 3 dividiren lasse, und daß auch diese beiden Zahlen selbst ohne Rest durch 3 dividirt würden;

(*) Quersumme der Zahl 4851 nenne ich die Summe 4 + 8 + 5 + 1, welche gefunden wird, indem man die Ziffern einer Zahlenreihe, ohne auf ihre Decimalstellen zu sehen, als Einer betrachtet zusammen addirt.

den; so würd ich zu wissen wünschen, ob diese beiden Umstände allemal miteinander verbunden wären, und man sicher von dem einen auf den andern schließen könne. Folgende Schlüsse können uns von der Wahrheit dieser Vermutung überzeugen.

§. 501.

Die Reihe H. 100000 + Z. 10000 + t. 1000 + h. 100 + z. 10 + e erhält den Werth von 94322, sobald man e = 2, z = 2, h = 3, t = 4, Z = 9, H = 0 sezt, oder wird = 4851, wenn man e = 1, z = 5, h = 8, t = 4, Z = 0, H = 0 sezt, und so kan man durch diese Reihe eine jede Decimalreihe, welche nur nicht über 6 Decimalstellen hat, ausdrükken, indem man stat eines jeden Buchstaben e, z, h ꝛc. entweder 0, oder von den andern einfachen Zahlen 1, 2, 3 ... 8, 9 die gehörige Zahl schreibt.

§. 502.

Bedenkt man, daß

$$\begin{array}{lll} e & = & e \\ z.\,10 & = z\,(3.3 \quad +1) & = 3.3\;z + z \\ h.\,100 & = h\,(33.3 \quad +1) & = 33.3\;h + h \\ t.\,1000 & = t\,(333.3 + 1) & = 333.3\;t + t \\ Z.\,10000 & = Z\,(3333.3 + 1) & = 3333.3\;Z + Z \end{array}$$

demnach der dritte Theil dieser Reihe allemal ist:

$$\frac{3.3\,z + 33.3\,h + 333.3\,t + 3333.3\,Z + e + z + h + t + Z}{3} =$$

$$= 3\,z + 33\,h + 333\,t + 3333\,Z + \frac{e + z + h + t + Z}{3}$$

so

so übersieht man sogleich, daß dieser dritte Theil allemal und nur alsdenn in einer ganzen Zahl könne angegeben werden, wenn e + z + h + t + Z das ist, wenn die Quersumme dieser Reihe ohne Rest durch 3 dividirt wird.

§. 503.

Sobald in einer Decimalreihe der Einer eine durch 2 theilbare Zahl ist, so läßt sich die ganze Reihe ohne Rest durch 2 dividiren. Denn die Hälfte der übrigen Zehner- Hundert- Tausendzahlen rc. mus allemal eine ganze Zahl sein, da 10 = 2.5, 100 = 10.2.5, 1000 = 100.2.5 rc. ist.

§. 504.

Wenn in einer Decimalreihe der Werth der beiden ersten Decimalstellen ohne Rest durch 4 getheilt wird; so läßt sich die ganze Reihe durch 4 theilen. Es mus z. B. 89324 durch 4 dividirt eine ganze Zahl geben, weil $\frac{24}{4}$ eine ganze Zahl 6 giebt. Denn da 100 = 4.25, folglich ein jedes einzelnes Hundert durch 4 theilbar ist; so mus eine jede Hundertzahl, folglich auch eine jede Tausend- Zehntausend- Zahl u. s. w. durch 4 theilbar sein.

§. 505.

Eine jede Decimalreihe ist durch 8 theilbar; sobald nur der Werth der drei ersten Decimalstellen durch 8 ohne Rest getheilt wird. Denn da z. B. 49576 = 49000 + 576 = 49.125.8 + 576 ist; so wird der 8te Theil von 49576 gewis eine ganze Zahl sein, wenn nur $\frac{576}{8}$ eine ganze Zahl giebt.

§. 506.

Eben so leicht ist es einzusehen, daß eine jede Decimalreihe allemal und nur in dem Falle durch 5 theilbar ist, wenn die Einer-Zahl selbst eine 5 ist; und durch 10 nur in dem Falle ohne Rest dividirt wird, wenn an der Einerstelle eine 0 steht.

§. 507.

Da eine jede Zahl, welche nicht nur durch 2, sondern auch durch 3 ohne Rest dividirt wird, nothwendig auch durch 6 theilbar ist; so mus eine jede gerade Zahl, deren Quersumme durch 3 ohne Rest dividirt wird, auch durch 6 theilbar sein.

§. 508.

Hiemit haben wir sehr leicht zu übersehende Kenzeichen aufgefunden, woraus man abnehmen kan, ob eine Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 8 und 10 theilbar sei. Lassen sich eben so nüzliche Regeln über die durch 7 theilbaren Zahlen bestimmen? Da

$$\begin{array}{lll} e & & = e \\ z.10 & = z(7+3) & = 7z+3z \\ h.100 & = h(14.7+2) & = 14.7h+2h \\ t.1000 & = t(142.7+6) & = 142.7t+6t \\ Z.10000 & = Z(1428.7+4) & = 1428.7.Z+4Z \\ H.100000 & = H(14285.7+5) & = 14285.7H+5H \\ T.1000000 & = T(142857.7+1) & = 142857.7T+T; \end{array}$$

so mus eine jede Decimalreihe durch 7 theilbar sein, wenn

$$\frac{e+3z+2h+6t+4Z+5H+T}{7}$$ eine ganze Zahl giebt.

§. 509.

Wir können z. B. überzeugt sein, daß sich die Zahl 5943 durch 7 dividiren lasse, da $3 + 3.4 + 2.9 + 6.5 = 63$ und $\frac{63}{7} = 9$ ist. Ob nun gleich diese Bestimmungen so verwikkelt sind, daß man weit lieber die Division durch 7 sogleich selbst versuchen wird; so ist doch diese Untersuchung in so fern nüzlich gewesen, als sie uns überzeugt hat, daß sich von der Theilbarkeit durch 7 keine nüzliche Kenzeichen auffinden lassen. Vielleicht sind wir glüklicher, wenn wir ähnliche Untersuchungen wegen der durch 9 theilbaren Zahlen anstellen.

§. 510.

Es ist $e = e$

$$z.10 = z\,(9+1) = 9\,z + z$$
$$h.100 = h\,(11.9+1 = 11.9.h + h$$
$$t.1000 = t\,(111.9+1) = 111.9.t + t$$
$$Z.10000 = Z\,(1111.9+1) = 1111.9.Z + Z$$

folglich $\frac{e + z.10 + h.100 + t.1000 + Z.10000}{9} =$

$$\frac{9.z + 11.9.h + 111.9\,t + 1111.9\,Z + e + z + h + t + Z}{9}$$

$$= z + 11.h + 111.t + 1111.Z + \frac{e + z + h + t + Z}{9}$$

folglich mus eine jede Decimalzahl durch 9 theilbar sein, dessen Quersumme durch 9 dividirt eine ganze Zahl giebt.

§. 511.

Eine Zahl kan ohne Rest durch 11 dividirt werden, wenn von der Quersumme aus den Einern, Hundert- Zehntausend- Tausendtausend- Zahlen ꝛc. die Quersumme der Zehner, Tausend- Hunderttausend-Zahlen abgezogen, entweder 0 oder eine andere durch 11 theilbare Zahl giebt.

Denn es ist

$$
\begin{array}{lll}
e & & = e \\
z.10 & = z(11-1) & = 11z - z \\
h.100 & = h(11.9+1) & = 11.9h + h \\
t.1000 & = t(1100-100) & = 1100 - 99t - t \\
Z.10000 & = Z(9999+1) & = 9999Z + Z \\
H.100000 & = H(110000-10000) & = 110000H \\
 & & - 9999H - H \\
T.1000000 & = T(999999+1) & = 999999T + T
\end{array}
$$

folglich wird allemal eine ganze Zahl den eilften Theil aller derjenigen Decimalreihen angeben, in welchen $\frac{e + h + Z + T - z - t - H}{11}$ das ist $\frac{(e + h + Z + T) - (Z + t + H)}{11}$ keinen Bruch giebt. Dies geschieht nur in denen Fällen, wo entweder $(e+h+z+T)-(Z+t+H) = 0$ oder $= n.11$ ist; indem n eine ganze Zahl bedeutet.

§. 512.

Es wird behauptet, daß man mit Ersparung vieler Mühe zu den Zahlen 479. 486, 96345, die vierte Proportionalzahl finden könne, indem man

(1

1) die erste Zahl von der zweiten subtrahirt,

2) durch diesen Rest (7) die dritte Zahl multiplicirt,

3) dies Produkt (674415) durch die erste Zahl (479) dividirt, und

4) den dadurch erhaltenen Quotienten $\left(1407\frac{462}{479}\right)$ zur dritten Zahl addirt, welches $97752\frac{462}{479}$ giebt.

Um nun zu entdekken, ob man durch dieses Verfahren in allen Fällen die vierte Proportionalzahl richtig finden müsse; so darf man nur die drei ersten Glieder einer Proportion durch a, b, c, ausdrükken und untersuchen, ob die durch ein solches Verfahren aus ihnen hergeleitete Zahl $= \frac{bc}{a}$ werde.

Wir erhalten aber nach und nach

1) $b - a$

2) $bc - ac$

3) $\frac{bc - ac}{a}$

4) $\frac{bc - ac}{a} + c$ das ist $= \frac{bc}{a} - c + c$, welches allerdings $= \frac{bc}{a}$ ist.

Zwei-

Zweiter Anhang.

Verzeichnis von den nöthigsten Lehrsäzen und Aufgaben der Elementargeometrie.

1.

Alle Vertikalwinkel sind einander gleich.

2) Bei Parallellinien sind die äußern Winkel gleich, daher

3) Auch die Wechselswinkel einander gleich sind, und

4) Die Summe der beiden Zwischenwinkel = 180° ist. Und umgekehrt.

5) Die Summe aller 3 Winkel beträgt in jedem Triangel = 180°.

6) Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten, einzeln genommen, gleich sind zweien Seiten eines andern Triangels, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel in beiden Triangeln einander gleich sind; so dekken sich die beiden Triangel.

7) Wenn in einem Triangel eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, einzeln genommen, gleich sind einer Seite des andern Triangels und denen beiden daranliegenden Winkeln; so dekken sich die Triangel.

8) Wenn die eine Seite eines Triangels gleich ist der einen Seite eines andern Triangels, die andre Seite des ersten Triangels gleich ist der andern Seite des andern Triangels und die dritte Seite des ersten Triangels gleich ist der dritten Seite des andern Triangels; so müssen diese beiden Triangel einander dekken.

9) Eine Normallinie (senkrechte Linie) (Perpendikulairlinie) aus einem bestimten Punkte in einer Linie aufzurichten.

10) Eine Normallinie aus einem bestimten Punkte auf eine gegebne Linie fallen zu lassen.

11) Einen jeden Winkel in zwei gleiche Winkel zu teilen.

12) Eine jede Linie in zwei gleiche Linien zu teilen.

13) Der äußere Winkel am Triangel hält so viel Grade, wie die beiden innern zusammen genommen.

14) In einem gleichschenklichten Triangel sind die beiden den gleichen Seiten gegen über liegenden Winkel einander gleich, und umgekehrt, daher

15) In einem gleichseitigen Triangel die drei Winkel einander gleich sind.

16) Ein

16) Ein Winkel am Centro ist noch einmal so groß, als ein Winkel an der Peripherie, welcher mit ihm auf gleichen Bogen steht, daher

17) Alle Winkel an der Peripherie in einem oder gleichen Zirkeln, welche auf einerlei oder gleichen Bogen stehen, einander gleich sind (*), und ein jeder Winkel an der Peripherie im halben Zirkel ein rechter Winkel sein mus.

18) Aus dem Endpunkte einer Linie eine senkrechte Linie aufzurichten.

19) Gleiche Sehnen in einem oder in gleichen Zirkeln haben gleiche Bogen, und umgekehrt.

20) Eine aus der Mitte einer Sehne aufgerichtete Normallinie, teilt die beiden Bogen dieser Sehne in zwei gleiche Teile, und geht folglich durch das Centrum des Zirkels.

(*) Hiebei mus gezeigt werden, daß man auch von dem Winkel A F I (Fig. 35.) wo die I F den Cirkel in F berührt, sagen könne, daß er ein Winkel an der Peripherie sei und auf dem Bogen A F stehe, folglich = A p n = A B F sei. Dieser Saz wird besonders bei den Auflösungen der XXXI. Aufgabe gebraucht. In dieser 35. Figur solte noch die Linie t F weiter fort bis nach I verlängert sein.

21) Durch jede drei gegebne Punkte, welche nur nicht in einer graden Linie liegen, einen Zirkelkreis zu beschreiben.

22) Die Summe aller Winkel in einem geradlinichten Vielekke zu finden.

23) Der Polygonwinkel in einem regulairen n ekke ist $= \frac{(n-2)\,180}{n}$.

24) Um jedes regulaire Vielek läßt sich ein Cirkel beschreiben.

25) Die Seite eines regulairen Sechseks ist gleich dem Radius des um dasselbe beschriebnen Cirkels.

26) Die Zahl der Zolle in der Grundlinie eines Rechtekkes, multiplicirt durch die Zahl der Zolle in seiner Höhe h, giebt ein Produkt b h, welches die Zahl derer Quadratzolle angiebt, welche in dem Flächenraume des Rechtekkes Plaz finden.

27) Alle Quadrate, Rechtekke, Rhomben und Rhomboiden sind Parallelogramme.

28) Alle senkrechte Linien, zwischen Parallellinien sind einander gleich.

29) Ein jedes Parallelogram ist dem Flächenraume nach einem Rechtekke gleich, welches mit ihm gleiche Höhe und Basis hat.

30) Daher wird der Flächenraum eines jeden Parallelogrammes durch das Produkt b h angegeben, wenn b die Zahl der Grundlinie, und h die Zahl der Höhe ist. Bei einem Quadrate wird b = h, also durch b b der Flächenraum eines Quadrates angegeben, dessen Seite = b ist.

31) Ein jedes Parallelogram wird durch eine Diagonallinie in zwei sich dekkende Triangel zerteilt. Daher müssen in einem Parallelogramme die gegen über liegenden Winkel und Seiten einander gleich sein.

32) Umgekehrt, wird erwiesen, daß jede vielseitige Figur, deren gegen über liegende Seiten einander gleich sind, ein Parallelogram ist.

33) Der Flächenraum eines jeden Triangels wird durch $\frac{b\,h}{2}$ angegeben, wenn b die Zahl der Längenmaße in der Basis und h die Zahl der Längenmaße in der Höhe angiebt. Ein jedes geradelinichte Vielek kan in Triangel zertheilt und danach ausgemessen werden.

34) Wenn Fig. 35. der kleine Bogen E D etwan nur der 1000000te Teil der ganzen Peripherie ist; so wird er von einer geraden Linie nicht merklich abweichen. D C E wird alsdan ein geradelinichter Triangel, dessen Basis D E und Höhe

 CH

CH ist, so daß die Zahl von $\frac{ED.CH}{2}$ den Flächenraum dieses kleinen Triangels, folglich 100000 $\frac{ED.CH}{2}$ den Flächenraum des ganzen Zirkels angeben mus. Da nun aber 100000. ED = p ist, wenn p die Peripherie des Zirkels bedeutet, und CH der Radius des Zirkels selbst ist, welchen wir r nennen wollen; so mus $p.\frac{r}{2}$ den Flächenraum des ganzen Zirkels angeben. $p.\frac{r}{2}$ ist auch $= p.\frac{d}{4}$, wenn d den Diameter bedeutet. Nach einer hinlänglich genauen Berechnung, deren Möglichkeit durch den folgenden Lehrsaz kan gezeigt werden, ist p = 3, 14 d.

35) Das Quadrat der grösten Seite eines rechtwinklichten Triangels (Quadrat der Hypothenuse ist gleich den Quadraten der beiden kleinern Seiten (den Quadraten der beiden Katheten). Woraus sogleich folgt, daß das Quadrat des einen Katheten gleich sein müsse dem Unterschiede zwischen dem Quadrate der Hypothenuse und dem Quadrate des andern Katheten.

36) Wenn zwei durch Parallelen begränzte Linien von einer dritten Parallele durchschnitten werden; so verhalten sich die beiden ganzen Linien, wie

wie die von einerlei Parallelen abgeschnittenen Teile.

37) Wenn zwei Seiten eines geradelinichten Triangels von einer geraden Linie dergestalt durchschnitten werden, daß sich die beiden durch diese Linie und die Spize des Triangels begränzten Teile verhalten, wie die beiden Seiten; so geht diese schneidende Linie mit der dritten Seite des Triangels parallel.

38) Wenn in zweien Triangeln zwei Winkel einzeln genommen, einander gleich sind, so müssen die beiden Triangel ähnlich sein.

39) Wenn ein Winkel eines Triangels gleich ist einem Winkel eines andern Triangels, und die vier diese beiden Winkel einschließenden Seiten proportional sind; so müssen die beiden Triangel ähnlich sein.

40) Wenn A, B, C die drei Seiten eines Triangels, d, e, f die drei Seiten eines andern Triangels bedeuten, und es ist A : d = B : e, ferner A : d = C : f; so müssen diese beiden Triangel einander ähnlich sein.

41) Zu jeden drei gegebnen Linien, die vierte Proportionallinie zu finden.

42) Zu jeden zwei gegebnen Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

 43) Eine

43) Eine gegebne Linie in eine beliebige Anzal gleicher Teile zu teilen.

44) Eine gegebne Linie nach einem oder nach mehrern gegebnen Verhältnissen zu teilen.

45) Die Perimeter zweier ähnlichen Figuren verhalten sich wie zwei ihrer gleichliegenden Seiten oder Diagonalen.

46) Die Flächenräume zweier ähnlichen Triangel verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten oder Diagonalen.

47) Die Flächenräume aller ähnlichen Figuren verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten oder Diagonalen.

48) Die Peripherien zweier Zirkel verhalten sich wie ihre Durch- oder Halbmesser.

49) Zwei Zirkelflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durch- oder Halbmesser.

50) Wenn eines rechtwinklichten Parallelipipedums Länge l''', Breite b''' und Höhe h''' hält; so ist der Inhalt des Parallelipipedums $= lbh'''$ oder auch $= gh$, indem $g = lb$ gesezt wird, und also g das Maß der Grundfläche angiebt.

51) Ein jedes Parallelipipedum, jedes Prisma und jeder Cylinder ist gleich einem rechtwinklichten Parallelipipedum, welches mit ihm gleiche Grund-

Grundfläche g und Höhe h hat, folglich wird auch der Inhalt aller dieser Figuren durch das Produkt g h angegeben.

52) Ein Kubus ist ein rechtwinklichtes Parallelipipedum, wo b = l = h, folglich mus der Inhalt eines Kubus, dessen Seite = b ist, = b^3 sein.

53) Alle dreiseitige Piramiden von gleichen Höhen und Grundflächen sind einander gleich. Eine dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma, welches mit ihr gleiche Grundfläche g und Höhe h hat; folglich wird der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide durch die Zahl $\frac{g\,h}{3}$ oder $g \cdot \frac{h}{3}$ angegeben.

54) Eine jede vielseitige Piramide kan in mehrere dreiseitige Piramiden zertheilt, und ein Kegel als eine Piramide von unendlich vielen Seiten betrachtet, und dadurch gezeigt werden, daß der Inhalt einer jeden Piramide und eines jeden Kegels $= g \cdot \frac{h}{3}$ sei. Und da bei einem Kegel $g = \frac{p\,d}{4}$ ist; so wird auch der Inhalt eines Kegels durch $\frac{p\,d\,h}{12}$ ausgedrükt.

55) Zwei Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durch- oder Halbmesser.

 56) Eine

56. Eine Kugel ist $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, dessen Grundfläche einer grösten Zirkelscheibe der Kugel, und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Daher ist die Kugel $= \frac{2}{3} . \frac{p\,d\,.\,d}{4}$ das ist $\frac{p\,d^2}{6}$ oder $\frac{314}{600} d^3$ wenn d den Diameter der Kugel und p die dazu gehörige Peripherie angiebt.

57) Die Umfläche einer Kugel ist $= p\,d$.

58) Die Seitenfläche eines geraden Cylinders ist $= p\,h$, wenn p die Peripherie seiner Grundfläche und h seine Höhe angiebt.

59) Die Seitenfläche eines geraden Kegels ist $= \frac{p\,s}{2}$, wenn p die Peripherie seiner Grundfläche und s die Länge einer geraden Linie angiebt, welche aus der Spize des Kegels nach einem Punkte dieser Peripherie gezogen wird.

Bayerische Staatsbibliothek München

Verbesserungen.

Seite 4. Zeile 6. stat dreimal lies viermal.

S. 8. Z. 6 und 7, von unten, stat $\frac{1}{37}$ l. $\frac{1}{35}$.

S. 31. unterste Zeile, stat 144 l. 44.

S. 39. Z. 2. stat = 6 l. = x.

S. 40. Z. 3 stat 12 l. 8.

— — 4. stat 12 — 2 l. 8 + 2.

S. 41. Z. 5 von unten, stat XII l. X.

S. 43. Z. 14. stat x l. 2x.

S. 67. Z. 8. stat 40 l. 10.

— — 10. stat 10 l. 20.

S. 68. Z. 5 von unten, stat 10 + l. + 10.

S. 70. Z. 9. stat — 40 l. + 40.

S. 72. Z. 5. stat 20 l. 20 Rthlr. vorrätiges Geld.

— — 7. stat — 20 l. 20 Rthlr. Schuld.

S. 75. Z. 8. stat — a — b l. — a und — b.

S. 84. Z. 9 und 10. stat 7 l. 1.

S. 89. Z. 2 von unten, stat 7 l. 6.

S. 90. Z. 9 von unten, stat 0, 9 l. 0, 0.

S. 93. Z. 9. stat $\frac{4}{5}$ l. $\frac{3}{8}$.

— — 12 nnd 13. stat 0, 35 l. 0, 375.

S. 94. Z. 6. stat $\frac{2,000}{3}$ l. $\frac{2,000}{7}$

— — Z. 8 von unten, stat $\frac{6,00}{7} = 0,85$ ꝛc.

l. $\frac{6,000000}{7} = 0,857142$.

Seite

Seite 94. Z. 7 v. u. stat: derselbe Rest bleiben mus; so wird $\frac{6,000000}{7}$ l. die Reste in eben der Ordnung wieder kommen müssen; so wird $\frac{6,00000000}{7}$.

— — 6 v. u. stat 0,857142 ꝛc. l. 0,85714285 ꝛc.

S. 101. Z. 13. stat §. 163 l. §. 162.

S. 105. Z. 2. stat der beiden a lies jedes mal b.

S. 109. Z. 2. stat §. 114 l. §. 173.

S. 116. Z. 10. stat $5\frac{2}{4}$ l. $5\frac{3}{4}$.

— — Z. 17. stat 5. 3. 23 l. 5. 23.

— — Z. 18. stat 345. l. 115.

S. 117. Z. 7 v. u. stat c l. $\frac{c}{n}$.

S. 119. Z. 10 v. u. stat $\frac{6}{3}$ l. $\frac{2}{3}$.

S. 120. Z. 2 v. u. stat 2 y l. $\frac{2\,y}{15}$.

S. 122. Z. 6, 7, 8, 9. v. u. stat 1000 l. 100.

S. 130. Z. 6 v. u. stat x l. c — x.

S. 136. Z. 10. stat 42 l. 41.

S. 139. Z. 4 v. u. stat: zu AB : AC = AD l. L in AB : AC = AD : L.

S. 152. Z. 4 v. u. stat pag. 89 l. pag. 59.

S. 156. Z. 4. stat Lehrsaz l. Beweis.

S. 159. Z. 6. stat §. 45 l. §. 43.

S. 161. Z. 3 v. u. stat 2a l. $2a^2$.

S. 165. Z. 5 v. u. stat 6561 l. 6241.

S. 171. Z. 4. stat = 925 l. = 900.

S. 183. Z. 3. stat k l. h.

S. 194. Z. 9. stat $\frac{45}{29}$ l. $\frac{45}{2y}$.

Seite

Seite 214. Z. 5 v. u. stat Num. 44 l. Num. 46.

S. 218. Z. 10. stat §, 233 l. §. 332.

S. 220. Z. 4. stat mitlere l. dritte.

— — Z. 5. stat zwischen l. zu.

S. 222. Z. 7, 8, 12 stat f l. F.

S. 223. Z. 4...6 stat: $GF \stackrel{\frown}{\frown} CB$ (Num. 37.) und daher $o = u$ sein. Da nun ferner $> GAF = > CAB$; so mus (Num. 38.), lies: und ferner $> GAF = > CAB$, (nach Num. 39.)

S. 227. Z. 3 v. u. stat e a d l. e A d.

S. 238. Z. 6 v. u. stat x^2 l. $3x^2$.

S. 242. Z. 9 v. u. stat 163, 92 l. 163, 8.

S. 244. Z. 8. stat x l. 2c.

S. 249. Z. 8 stat x l. a.

S. 254. Z. 7 v. u. stat FD^2 l. FE^2

— — Z. 7. v. u. stat $\sqrt{2}$ l. $\sqrt[3]{2}$.

S. 255. Z. 2. v. u. stat y l. g.

— — Z. 3. v. u. stat x^3 l. x.

S. 267. Z. 11. stat 800 l. 400. und stat 400 l. 800.

— — Z. 13. stat 2 : 1 l. 1 : 2.

S. 27. Z. 4. stat, so ist AD l. so ist BD.

— — Z. 5. stat $- AD^2$ l. $- BD^2$.

S. 264. Z. 6 v. u. stat 80 l. 88.

S. 279. Z. 7. stat P l. $\frac{P}{2}$.

S. 284. Z. 5 v. u. stat nBm l. nBM.

S. 293. Z. 3. v. u. da ferner .... gefunden werden, kan weggestrichen werden.

S. 295. Z. 12. stat n (a l. $\frac{n}{2}$ (a.

S. 303. stat 5 l. 6. stat 8. l. 9.

1325
3725
50
F12
1/2 Stol.

[illegible]

tto Gilch
binderei - Prägerei
en 8-Steinstr. 42-Tel. 44 20 52

Busse, Friedrich Gottlieb von,

Erster Unterricht in der algebraischen Auflösung arithmetischer und geometrischer Aufgaben Ein Lehrbuch d. Dessauischen Erziehungsinst. ; Mit 2 Kupfertaf

Dessau u.a. 1781

Math.u. 308 s-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594477-2
VD18 14647214-001